



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

WALBERTI PANTOJA DA SILVA

## **ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA**

Macapá

2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

WALBERTI PANTOJA DA SILVA

## **ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Licenciatura  
Plena em Física da Universidade Federal  
do Amapá, sob orientação do Prof. Dr.  
Juan José Diaz Bulnes.

Macapá

2014

WALBERTI PANTOJA DA SILVA

**ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, para obtenção do Título de Licenciado em Física.

Banca Examinadora:

---

Orientador: Prof. Dr. Juan José Diaz Bulnes  
Universidade Federal do Amapá

---

Examinador 1: Prof. Dr. Yony Walter Milla Gonzáles  
Universidade Federal do Amapá

---

Examinador 2: Prof. Dr. João Bosco de Siqueira  
Universidade Federal do Amapá

**Avaliado em: 12 de dezembro de 2014**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Juan José Diaz Bulnes, por ter sido um excelente professor em suas disciplinas neste curso, aprendi muito com sua experiência e dedicação, e aos seus conselhos dados em sala de aula, e acima de tudo por sua orientação a este trabalho, terá sempre a minha admiração.

Aos professores do curso por seus conselhos e dedicação com os alunos, em apresentar a Física de maneira clara e correta.

Aos meus pais e meus irmãos que sempre me apoiaram neste curso.

A Juliana Belfor, que me apoiou e sempre esteve comigo em todos os sentidos.

Aos colegas e amigos que fiz no curso, pelos momentos de descontração, dedicação e disciplina.

## RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em licenciatura em física apresentamos nossos resultados matemáticos e discussões relativas às principais ideias e métodos da formulação de Feynman da mecânica quântica.

**Palavras chaves:** Formulação de Feynman da mecânica quântica, propagador quântico, métodos perturbativos, regras de Feynman, diagramas de Feynman.

## **ABSTRACT**

*In this monograph of graduate degree in physics we present our mathematical results and discussions about of the main ideas and methods of the quantum mechanics as formulated by Feynman.*

**Keywords:** *Feynman's formulation of quantum mechanics, quantum propagator, perturbatives methods, Feynman rules, Graphs of Feynman.*

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	9
1.1. Aspectos gerais da mecânica clássica e quântica .....	11
<b>2. ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA</b> .....	14
2.1. Soma sobre caminhos e a definição do propagador de Feynman .....	14
2.2. Algumas propriedades do propagador .....	15
2.3. O propagador para uma partícula livre 1-dim.....	17
2.4. O propagador para uma partícula submetida a um potencial gravitacional terrestre.....	17
<b>3. PROPAGADOR QUÂNTICO E A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER</b> .....	19
<b>4. A ESSENCIA DO MÉTODO PERTURBATIVO DE FEYNMAN E UMA APLICAÇÃO PARA UMA ‘E.D.O.’</b> .....	24
4.1. O método perturbativo de Feynman em um contexto simplificado com uma equação matricial ordinária .....	24
4.2. Resolvendo uma EDO com coeficientes constantes pelos métodos da álgebra linear .....	29
4.3. Aplicação do método perturbativo de Feynman a uma EDO com coeficientes perturbados. ....	38
<b>5. DEDUÇÃO FORMAL DAS EXPRESSÕES NO MÉTODO PERTURBATIVO DE FEYNMAN</b> .....	47
<b>6. O MÉTODO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN PODE FORNECER RESULTADOS CORRETOS USANDO UMA FUNCIONAL DISTINTA À AÇÃO?</b> .....	51
<b>7. ASPECTOS ELEMENTARES DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA</b> .....	54
7.1. O contexto físico, algumas definições e a ‘regra de ‘ouro’ .....	54
7.2. Diagramas de Feynman e regras de Feynman (para partículas de spin (zero).....	56
7.3. Aplicação das regras de Feynman num processo de espalhamento .....	58
<b>8. UMA NOVA APLICAÇÃO: SOBRE A EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES DE SCHRÖDINGER E FEYNMAN NO CONTEXTO DE NOVAS LAGRANGEANAS</b> .....	64
<b>CONCLUSÕES</b> .....	65
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	66
<b>APÉNDICE A</b> .....	67

**APÉNDICE B .....69**

## 1. INTRODUÇÃO

Consistentemente com os objetivos estabelecidos no curso de Física da UNIFAP, para a elaboração de um trabalho de conclusão de curso de graduação em licenciatura em física, foi encarado o desafio de apresentar, de maneira introdutória, alguns dos conceitos e métodos gerais da chamada 'Formulação de Feynman' da mecânica quântica, para logo desenvolver cálculos originais completos e cálculos complementares aos que foram encontrados nas referências utilizadas; além disso, foram realizadas discussões e oferecido esclarecimentos considerados oportunos.

A necessidade de completar o trabalho em dois semestres acadêmicos trouxe como consequência a obrigação de identificar os assuntos que seriam incluídos neste TCC; outros assuntos, possivelmente de similar importância ou relevância ficaram, por isso, de fora.

Do ponto de vista do "por que" da escolha deste tema é importante dizer que, como consequência das limitações de 'tempo e de espaço' no oferecimento e conteúdo, respectivamente, das diversas disciplinas, os cursos de graduação vem-se na necessidade de limitar-se a determinados assuntos, fato que entre os alunos pode trazer (geralmente traz) a ideia de que 'tudo o que poderia ser oferecido (sobre uma determinada área da física) já foi oferecido'. Esses assuntos, por razões pedagógicas, devem ser os mais simples ou básicos (que não necessariamente correspondem à realidade em todas as suas características), deixando para depois os assuntos mais próximos das verdadeiras manifestações da natureza, que são os mais complexos de se trabalhar, tanto do lado conceitual como do lado matemático. No caso da disciplina Mecânica Quântica, o *rito acadêmico* consiste em apresentar aspectos gerais da chamada de 'formulação de Schrödinger a qual baseia-se em uma equação diferencial linear em derivadas parciais para um campo complexo, equação que, por sua forma, lembra a equação de difusão usualmente apresentada nos livros de física geral; isto é, da física linear.

Com relação aos processos e fenômenos quânticos, há muitíssimos assuntos de grande importância sobre os quais pouco ou nada poderia ser dito no nível de graduação. Por exemplo, a mecânica quântica não relativística pode ser formulada também através do enfoque, conceitos e considerações de Wigner, em que a função

de onda depende simultaneamente de variáveis de posição e variáveis de momentum e no que se definem as chamadas distribuições de *quase-probabilidade*, etc., de amplo uso na Óptica Quântica que lida, por exemplo, com fótons isolados. Pode-se falar também da formulação de Feynman, baseada na construção de um operador diretamente estatístico, chamado de ‘propagador quântico’, construído a partir da Lagrangeana clássica correspondente ao sistema considerado e definido através de uma ‘soma’ adequada, assunto deste TCC. Ainda no caso não relativístico, a mecânica quântica mais geral não faz uso dos estados puros, senão das misturas estatísticas, do operador densidade e permite estudar a dinâmica de sistemas quânticos a temperatura finita ou interagindo com um ambiente. A mecânica quântica dos átomos e dos processos atômicos, a Física Atômica, é também muito importante, assim como os recentes desenvolvimentos nas áreas da Computação Quântica e da Informação Quântica. Além disso, temos a mecânica quântica para partículas quânticas relativísticas estudadas dentro de um cenário muito mais amplo e matematicamente mais complexo, onde a dinâmica correspondente está governada pela equação de Dirac, no caso de partículas com spin  $\frac{1}{2}$ , cujo limite não relativístico é, justamente, a equação de Schrödinger. Assuntos e problemas específicos como os relativos aos processos de geração, propagação e absorção da radiação, em termos puramente quânticos, tratam-se na Eletrodinâmica Quântica, superando assim o uso de alguns métodos semi-clássicos para estudar esses mesmos assuntos na Física Nuclear, que é a abordagem da mecânica quântica aplicada especificamente aos núcleos atômicos e aos processos nucleares. Nenhum tópico correspondente aos assuntos anteriormente comentados poderia ser seriamente ou sistematicamente desenvolvido nas disciplinas de graduação de licenciatura em física. Desta maneira, um trabalho de conclusão de curso é uma boa oportunidade para tomar conhecimento dessa situação, desse contexto geral, e para ter a possibilidade de ganhar um pouco de experiência abordando alguns aspectos básicos desses temas mais elaborados ou aprendendo a usar e interpretar seus conceitos e métodos em alguma situação relativamente simples que deveria ser identificada ou construída.

Este TCC está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 oferece-se uma introdução geral e no subcapítulo 1 apresentam-se alguns aspectos principais da mecânica clássica e da mecânica quântica. No capítulo 2 apresentam-se alguns

aspectos da formulação de Feynman não-relativística, incluindo quatro (4) subcapítulos. Sobre a soma de caminhos e a definição do propagador quântico de Feynman; algumas propriedades gerais do propagador de Feynman, e propagadores específicos nos casos de uma partícula livre e de uma partícula submetida ao potencial gravitacional na superfície terrestre (um caso de potencial linear). No capítulo 3 apresentam-se as contas matemáticas através das quais verifica-se que o propagador de Feynman satisfaz a equação de Schrödinger. No capítulo 4 apresenta-se o método perturbativo de Feynman em um contexto não formal através da sua aplicação a uma equação diferencial ordinária com coeficientes perturbados, o que, de um lado, mostra que o método de Feynman não é exclusivo da mecânica quântica, um resultado já conhecido através da ref. [2]; por outro lado, simplifica a sua apresentação, pois, assim, evitam-se as complicações conceituais físicas subjacentes à abordagem formal. É importante destacar que a solução começa transformando a equação diferencial ordinária não perturbada em uma equação matricial, para logo resolver ela através dos métodos da álgebra linear. No capítulo 5 deduzem-se formalmente as expressões perturbativas de Feynman para distintas ordens da aproximação. No capítulo 6 relata-se uma discussão significativa baseada em uma mudança da funcional na expressão do propagador de Feynman sendo considerada a funcional de caminho óptico. No capítulo 7 apresentam-se alguns poucos aspectos da formulação de Feynman da mecânica quântica relativística: ideias sobre as regras e os diagramas de Feynman são apresentadas no caso de partículas de espín zero, para depois aplica-las a um processo de espalhamento. No capítulo 8 é visto uma possível abordagem entre a equivalência da formulação Schrödinger e Feynman em um contexto de novas Lagrangeanas.

### **1.1. ASPECTOS GERAIS DA MECÂNICA CLÁSSICA E QUÂNTICA**

[1] Na mecânica clássica, se é conhecida a força total que atua sobre um corpo (de massa  $m$ ) para todo instante de tempo e as condições iniciais correspondentes (sua posição e velocidades iniciais) poderemos determinar de maneira precisa seu comportamento dinâmico para qualquer instante posterior.

[2] Qualquer medição que possa ser feita a qualquer tempo (supondo que novas forças não venham a atuar sobre a partícula) não revelará nenhuma informação nova com relação ao comportamento dinâmico que não possa ser determinado diretamente a partir da equação dinâmica correspondente.

[3] Na mecânica quântica, por outro lado, a situação é completamente distinta. Suponha que conhecermos as interações (o hamiltoniano quântico) entre a partícula e outras partículas (no seu entorno) para todo tempo e a condição inicial correspondente (a função de onda  $\varphi$  para o tempo inicial). Toda essa informação não será suficiente para nós podermos prever exatamente o resultado de uma medição particular realizada a qualquer tempo posterior; somente poderemos prever as probabilidades de que sejam encontrados os distintos resultados possíveis.

[4] No contexto da mecânica clássica um aparelho de medição não perturba o estado do sistema físico sob medição; já com relação ao contexto quântico, pode-se dizer que um aparelho de medição perturba o estado do sistema quântico sendo medido.

Na física clássica é possível descrever a dinâmica dos sistemas físicos submetidos a um potencial  $V$  através de uma função Lagrangeana, que é do tipo,

$$L: \mathcal{R}^{1+2n} \rightarrow \mathcal{R} \quad (1)$$

com  $1 + 2n$  variáveis *independentes*. É através da Lagrangeana que se define a funcional de Ação  $S$ , que atribui a toda trajetória  $q: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  continuamente diferenciável que une os pontos ‘tempo-espaço’  $(t_1, \mathbf{x}_1)$  e  $(t_2, \mathbf{x}_2)$ , com  $t_2 > t_1$ , fixados com antecedência, o número  $S(\mathbf{x}_2, t_2, \mathbf{x}_1, t_1, q)$ , definido da pela expressão,

$$S(\mathbf{x}_2, t_2, \mathbf{x}_1, t_1, q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), q'(t)) dt \quad (2)$$

Perceba-se que em (2) a função  $L$  depende de uma variável independente,  $t$ ; logo,  $L(t, q(t), q'(t))$  representa o valor da Lagrangeana para a trajetória  $q$  considerada. Pode ser conveniente comentar que a Lagrangeana, assim como a Ação, são objetos matemáticos que não estão associadas com grandezas físicas, no entanto, são muito úteis na física; a Hamiltoniana, a diferença da primeira, sim está associada diretamente com uma grandeza física: a energia. Lembremos que a ação tem valor extremal para a trajetória fisicamente percorrida pelo sistema (seu centro de massa).

Por outro lado, na mecânica quântica, dado o potencial  $V(x, t)$ , postula-se a existência de:

[1] Uma função complexa,

$$\Psi: \mathcal{R}^{1+n} \rightarrow \mathcal{C} \quad (3)$$

que deve conter toda a informação sobre o sistema físico considerado.

[2] Um operador diferencial espacial, chamado de Hamiltoniano,

$$\hat{H} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2 + \hat{V} \quad (4)$$

em que o potencial atua como um operador multiplicativo (operador diagonal);  $\hbar$  e  $m$  são a constante de Planck e a massa da partícula quântica, respectivamente.

[3] Uma equação diferencial, chamada equação de Schrödinger,

$$\hat{H}\psi = -i\hbar\partial_t\psi \quad (5)$$

sendo  $\partial_t$  é o operador de derivação temporal. As soluções contêm, de maneira probabilística, com densidade de probabilidade igual a  $|\psi|^2$ , toda a informação sobre o sistema considerado.

## 2. ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA

Neste capítulo seguimos as ref.[1] e ref.[3]. No contexto da mecânica quântica o *propagador* é um operador de evolução temporal que carrega a dinâmica do sistema considerado; assim, dada a função de onda para um determinado instante de tempo, a aplicação do propagador sobre tal função de onda gera uma nova função para um instante posterior. Propagadores quânticos calculam-se nos livros gerais de mecânica quântica com independência da proposta de Feynman; pois a ideia do propagador não surgiu com Feynman. O que surgiu foi uma abordagem distinta em que faz uso da Lagrangeana, da Ação e de uma soma sendo “todos os possíveis caminhos” contribuem para o valor do propagador. Esses assuntos serão brevemente apresentados neste capítulo.

### 2.1. SOMA SOBRE CAMINHOS E A DEFINIÇÃO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN.

Com base na ref.[1] e ref.[3], para um sistema quântico (unidimensional) com uma determinada configuração, para certo instante  $t_0$ , este estado pode ser representado por certa função de onda  $\varphi_{t_0}$ , para esse sistema em um instante posterior  $t$  correspondera a uma nova função de onda  $\varphi_t$ , para correspondente evolução dinâmica. Pode-se obter como resultado, a aplicação do respectivo propagador sobre a função de onda inicial  $\varphi_{t_0}$ .

$$\varphi_t = K(t, t_0)\varphi_{t_0} \quad (6)$$

Para  $t > t_0$

Os elementos do vetor  $\varphi_t$  podem ser representados por uma integral de produto de elementos de uma matriz por um vetor, para infinitos caminhos.

$$\varphi_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; x_0, t_0)\varphi_{t_0}(x_0)dx_0 \quad (7)$$

Feynman em sua formulação da mecânica quântica não relativística propôs o propagador para dois pontos espaço-temporais fixo entre os intervalos de tempos  $t > t_0$ , esses pontos espaço-temporais fixos podem ser representados por uma soma sobre todos os possíveis caminhos  $q$  contínuos (diferenciável) que conectam os pontos.

$$K(t, x, t_0, x_0) = \sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, t_0, x_0, q)} \quad (8)$$

A somatória representa os vetores unitários no plano complexo, onde sua fase é representada por uma funcional de ação para todos os possíveis caminhos.

Como a exponencial representa um vetor no plano complexo, a equação (8) possui certa propriedade, sendo o expoente  $S(q') \approx S(q) + \pi\hbar$ , dessa forma, para os respectivos vetores.

$$e^{\frac{i}{\hbar} S(q)} + e^{\frac{i}{\hbar} S(q')} \approx 0 \quad (9)$$

Para uma distribuição quase homogênea, para todos os possíveis caminhos, onde podemos determinar os vetores correspondentes em uma vizinhança de caminhos clássicos, dessa forma quase todos os vetores se anulam, restando apenas os vetores em uma vizinha muito pequena onde a função possui um extremal, no caso um mínimo, que produzira um vetor de maior magnitude, assim para uma vizinhança  $V_c$  onde a função possui um extremal, considera-se a seguinte situação.

$$\sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(q)} \approx \sum_{V_c} e^{\frac{i}{\hbar} S(q')} \quad (10)$$

Onde  $q$  são todos os caminhos possíveis e  $V_c$  representa uma vizinhança muito pequena onde a função possui um extremal.

## 2.2. ALGUMAS PROPRIEDADES DO PROPAGADOR

Com base na ref.[1] e ref.[3], a seguir apresentam-se duas propriedades relevantes dos propagadores quânticos.

[1] Considerando que a evolução temporal de um sistema físico entre os instantes de tempo  $t_0$  e  $t_2$  pode ser entendida como sendo composta de duas etapas independentes: a que vai de  $t_0$  para  $t_1$  e a que vai de  $t_1$  para  $t_2$ , pode-se escrever,

$$K_{t_2, t_0} = K_{t_2, t_1} K_{t_1, t_0} \quad (11)$$

com  $t_0 < t_1 < t_2$ . A propriedade anterior é consistente do ponto de vista matemático e do ponto de vista da interpretação atribuída ao propagador. Do ponto de vista matemático, com relação a uma base dada, o propagador pode ser entendido como uma matriz contínua; nesse sentido, a expressão acima corresponde a um produto de matrizes contínuas que gera outra matriz do mesmo tipo. Do ponto de vista da interpretação atribuída ao  $K$  a expressão acima é consistente, pois, considerando as condições de contorno fixadas nos pontos extremos, ela se interpreta como a *amplitude de probabilidade* de que uma partícula que está no instante  $t_0$  no ponto  $x_0$  passe no instante  $t$  ao ponto  $x$ , o que, de acordo com as regras estabelecidas, é numericamente igual ao produto das amplitudes de probabilidade para dois eventos que acontecem em sequência e de maneira independente nos intervalos de tempo  $t_1 - t_0$  e  $t_2 - t_1$ . Considerando os elementos de matriz correspondentes, pode-se escrever,

$$K(t_2, x_2; t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t_2, x_2; t_1, x_1) K(t_1, x_1; t_0, x_0) dx_1 \quad (12)$$

que é uma generalização para o caso de matrizes contínuas a partir do caso com matrizes discretas.

[2] O propagador quântico comporta-se como uma ‘função’ delta de Dirac no limite em que  $t \rightarrow t_0$ , e escrevemos,

$$K(t, x; t_0, x_0) \rightarrow \delta(x - x_0) \quad (13)$$

quando  $t \rightarrow t_0$ ,

ou, de maneira explícita,

$$\varphi_{t_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{t_0}(x_0) \left( \lim_{t \rightarrow t_0} K(t, x; t_0, x_0) \right) dx_0 \quad (14)$$

### 2.3. PROPAGADOR PARA UMA PARTÍCULA LIVRE 1-DIM

Seguindo as ref.[1] e ref.[3]. verifica-se que para determinada função Lagrangeana, obtém-se a função ação para uma partícula livre. Para determinadas condições iniciais, sendo os pontos extremos e fixos, com a condição de que  $T > T_0$ , sendo expressa na ref.[1], dessa forma, o propagador para uma partícula livre pode ser expresso.

$$K_0(T, x, T_0, x_0) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(T - T_0)} \right) \times \exp \left[ \left( \frac{im}{2\hbar} \right) \frac{(x - x_0)^2}{T - T_0} \right] \quad (15)$$

Dessa forma, verifica-se que pela formulação de Feynman também se obtém o resultado que é visto em outras formulações onde o resultado já é conhecido, para uma partícula livre unidimensional, como é expresso na ref.[1], para o caso unidimensional.

### 2.4. PROPAGADOR PARA UMA PARTÍCULA SUBMETIDA A UM POTENCIAL GRAVITACIONAL TERRESTRE

Seguindo as ref.[1] e ref.[3], para uma função Lagrangeana, para uma partícula submetida a um potencial linear, no caso o potencial gravitacional terrestre, utiliza-se a formulação de Feynman para obter o respectivo propagador, que também é conhecido em outras formulações.

Dessa forma o propagador para uma partícula submetida a um potencial linear é descrito por.

$$K_G(T, x, y, T_0, x_0, y_0) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(T - T_0)} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[ \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{T - T_0} - g(y - y_0)(T - T_0) - \frac{1}{12} g^2 (T - T_0)^3 \right] \right\} \quad (16)$$

Assim, o propagador para uma partícula em um potencial linear é expresso pela formulação de Feynman da mecânica quântica, dessa forma verifica-se que também obtém o mesmo resultado que já é conhecido em outras formulações.

### 3. PROPAGADOR QUÂNTICO E A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Neste capítulo seguimos as ref.[3] e ref.[4]. Considere o propagador de Feynman,

$$K(t, t_0) = \sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(t, t_0, q)} \quad (17)$$

cuja soma é feita sobre todos os caminhos  $q$  continuamente diferenciáveis. O efeito da aplicação do propagador  $K(t + \varepsilon, t)$  sobre uma função de onda correspondente ao tempo  $t$  é gerar a função de onda para o tempo posterior  $t + \varepsilon$ ; expressado matematicamente, temos,

$$\varphi(t + \varepsilon) = K(t + \varepsilon, t)\varphi(t) \quad (18)$$

Observe que  $K(t + \varepsilon, t)$  é um operador; dessa maneira, em uma base dada, terá uma determinada representação matricial. Logo, os correspondentes elementos de matriz escrevem-se como  $K(t + \varepsilon, x | t, y)$ ,

$$\begin{aligned} K(t + \varepsilon, t)_{xy} &\equiv K(t + \varepsilon, x | t, y) = \\ &= \sum_q \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\varepsilon} L(q) dt \right] \approx \sum_q \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \varepsilon L(q^*) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Na expressão acima, temos usado o *teorema do valor médio* na integral da Ação; dessa maneira, e considerando que o intervalo de integração é pequeno, temos conseguido uma boa aproximação para o valor da Ação para *toda* curva  $q$ . Por outro lado, ainda que de acordo com o postulado de Feynman deva considerar-se a contribuição de todas as curvas para o valor do propagador, a imensa maioria delas anula-se por pares, de maneira que, efetivamente, somente os caminhos vizinhos à trajetória clássica contribuem para o propagador. Essa vizinhança

significativa tem uma largura da ordem<sup>1</sup> de  $\hbar$ . Por isso, em boa aproximação, pode-se escrever para a trajetória clássica,

$$K(t + \varepsilon, t)_{xy} = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \varepsilon L(q^*) \right] \quad (20)$$

Por outro lado, para a correspondente Lagrangeana, consideramos a seguinte aproximação razoável,

$$L(q^*) = \frac{1}{2} m \left( \frac{y - x}{\varepsilon} \right)^2 - V \left( t + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{y + x}{2} \right) \quad (21)$$

Dessa maneira, o elemento de matriz do propagador escreve-se como,

$$K(t + \varepsilon, t)_{xy} \approx \exp \left[ \frac{im}{2\varepsilon\hbar} (y - x)^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V \left( t + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{y + x}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Com isto, os elementos da função de onda (que pode ser vista como um vetor) escrevem-se,

$$\varphi(t + \varepsilon, x) \approx \sum_y K(t + \varepsilon, x | t, y) \varphi(t, y) \quad (23)$$

O símbolo de soma que aparece na expressão que define o valor do propagador de Feynman é somente formal; no entanto, ela deve ser realizada de alguma maneira. De acordo com as expressões encontradas e as aproximações realizadas a soma supracitada deve ser interpretada como significando a ‘integração com relação à variável  $y$ ’, onde também deve considerar-se uma constante, que escreveremos como sendo  $1/A$ , a que, de alguma maneira, carrega a multiplicidade dos caminhos. Então escrevemos,

---

<sup>1</sup> De onde se percebe facilmente o significado do *princípio de Bohr* de que tomando o limite  $\hbar \rightarrow 0$  recuperam-se expressões clássicas. Neste limite, a vizinhança considerada ‘colapsa’ em uma única curva: a curva percorrida classicamente.

$$\begin{aligned} \varphi(t + \varepsilon, x) &\approx \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(y-x)^2\right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(t + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{y+x}{2}\right)\right] \varphi(t, y) dy \end{aligned} \quad (24)$$

Na integral acima vamos considerar a seguinte mudança de variável:  $y = x + \zeta$ , sendo que  $x$  tem valor fixo (de onde temos que:  $dy = d\zeta$ ). Essa mudança não é feita só por fazer; ela tem um propósito específico: possibilitar a *expansão de Taylor* da função  $\varphi$  ao redor do ponto  $x$ . Vejamos isso. Depois de introduzir tal mudança de variável na integral acima se pode escrever,

$$\begin{aligned} \varphi(t + \varepsilon, x) &= \frac{1}{A(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\zeta^2\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(t + \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\zeta}{2}\right)\right] \varphi(t, x + \zeta) \end{aligned} \quad (25)$$

No membro esquerdo da equação acima vamos fazer uma *expansão de Taylor* da função  $\varphi$  até 1° ordem em  $\varepsilon$  e até 2° ordem com relação à variável  $\zeta$ . Então temos,

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) &\approx \frac{1}{A} \int d\zeta e^{\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\zeta^2} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(t + \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\zeta}{2}\right)\right] \times \\ &\times \left\{ \varphi(t, x) + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando a aproximação  $\varepsilon V\left(t + \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\zeta}{2}\right) \approx \varepsilon V(t, x)$ , pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) &\approx \frac{1}{A} \int d\zeta \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\zeta^2\right] \times \\ &\times \left\{ \varphi(t, x) + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(t, x)\varphi - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

Olhando para a expressão acima se pode perceber que é muito conveniente definir o valor do coeficiente  $1/A(\varepsilon)$  de maneira que,

$$\frac{1}{A(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\zeta^2\right] d\zeta = 1 \quad (27)$$

com isso,

$$A(\varepsilon) = \sqrt{-\frac{2\varepsilon\hbar\pi}{im}} = \sqrt{\frac{i2\varepsilon\hbar\pi}{m}} \quad (28)$$

Desta maneira, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) &\approx \frac{1}{A(\varepsilon)} \int d\zeta \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\zeta^2\right] \times \\ &\times \left\{ \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, x) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(t, x)\varphi - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \left( \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

Utilizando as integrais do apêndice A e B temos,

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) \approx \frac{1}{A(\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{1}{2im} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \left[ -\sqrt{\frac{i\pi}{m}} + \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \sqrt{\frac{i\pi}{m}} \right] + \frac{1}{A(\varepsilon)} \left( -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(t, x)\varphi \right) \sqrt{\frac{i\pi 2\varepsilon\hbar}{m}}$$

A expressão acima se pode simplificar considerando o valor de  $A(\varepsilon)$ ; assim obtemos,

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) \approx -\frac{\varepsilon\hbar}{2im} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{i\varepsilon^2 V}{2im\hbar} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(t, x)\varphi \quad (30)$$

Tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(t, x)\varphi \quad (31)$$

o que implica que,

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\hbar} V(t, x) \varphi \quad (32)$$

Ou também,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V\varphi = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (33)$$

Mas, a equação acima pode ser escrita como,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(t, t_0) \varphi(t_0) + VK\varphi(t_0) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} K(t, t_0) \varphi(t_0) = 0 \quad (34)$$

Note-se que  $\varphi(t_0)$  depende de  $x_0$  mas independe de  $x$ . Então podemos escrever,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(t, t_0) + VK(t, t_0) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} K(t, t_0) = 0 \quad (35)$$

Dessa maneira, a equação de Schrödinger resulta ser satisfeita pelo propagador de Feynman.

#### 4. A ESSENCIA DO MÉTODO PERTURBATIVO DE FEYNMAN E UMA APLICAÇÃO PARA UMA ‘E.D.O.’

Aqui seguimos as ref.[2], ref.[3] e ref.[4]. O método perturbativo de Feynman pode ser apreciado fora do contexto quântico, onde se manifesta mais claramente; isso foi feito na ref.[2] considerando uma equação diferencial ordinária (E.D.O.) com coeficientes inicialmente constantes. A solução da equação diferencial começou transformando ela em uma equação matricial, para depois fazer uso dos conceitos e métodos da álgebra linear. Na sequência, aquela equação recebeu pequenos termos dependentes do tempo acrescentados aos coeficientes iniciais, dessa maneira obtivemos a nossa ‘equação perturbada’ e sobre ela aplicou-se o método perturbativo de Feynman. A seguir apresentamos o método perturbativo de Feynman no contexto de uma equação matricial ordinária.

##### 4.1. O MÉTODO PERTURBATIVO DE FEYNMAN EM UM CONTEXTO SIMPLIFICADO COM UMA EQUAÇÃO MATRICIAL ORDINÁRIA

Com base nas ref.[2], ref.[3] e ref.[4], utiliza-se o método perturbativo para o caso mais simples, uma EDO linear.

[1] Consideremos uma equação matricial ordinária (não perturbada),

$$\mathbf{u}' = M\mathbf{u} \quad (36)$$

sendo  $M$  é uma matriz com elementos constantes e  $\mathbf{u}$  é um vetor cujas componentes dependem do tempo, considerada aqui como a variável independente.

A solução da equação (36) é, para  $t_0 = 0$ , evidentemente expresso por,

$$\mathbf{u}(t) = e^{tM}\mathbf{u}_0 \quad (37)$$

sendo  $\mathbf{u}_0$  é um vetor cujas componentes estão definidas pelas condições iniciais para  $t = 0$ . Note-se que  $e^{tM}$  é uma matriz, desde que  $M$  seja uma matriz.

A equação não perturbada pode também pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\partial_t \mathbf{u} = M\mathbf{u} \quad (38)$$

cuja solução no caso mais geral, para  $t_0 \neq 0$ , escreve-se como,

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)M}\mathbf{u}(t_0) \quad (39)$$

Utilizando as equações (38) e (39) podemos escrever.

$$(\partial_t - M)e^{(t-t_0)M}\mathbf{u}(t_0) = 0 \quad (40)$$

É conveniente definir um operador de evolução temporal  $\Pi^{(0)}$  da seguinte maneira,

$$\Pi^{(0)}(t, t_0) = \Theta(t - t_0)e^{(t-t_0)M} \quad (41)$$

onde  $\Theta$  representa a função de Heaviside, com isto, pode-se rescrever a solução da equação (38) como,

$$\mathbf{u}(t) = \Pi^{(0)}(t, t_0)\mathbf{u}(t_0) \quad (42)$$

Agora vamos derivar a expressão (41), obtendo,

$$\partial_t \Pi^{(0)}(t, t_0) = \delta(t - t_0)e^{(t-t_0)M} + M\Theta(t - t_0)e^{(t-t_0)M}$$

ou também,

$$\partial_t \Pi^{(0)}(t, t_0) = \delta(t - t_0)e^{(t-t_0)M} + M\Pi^{(0)}(t, t_0)$$

que pode ser rescrita da seguinte maneira conveniente,

$$(\partial_t - M)\Pi^{(0)}(t, t_0) = \delta(t - t_0)e^{(t-t_0)M} = \delta(t - t_0)I \quad (43)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade.

As manipulações matemáticas anteriores tiveram como efeito o poder para rescrever a nossa equação inicial não perturbada da seguinte maneira,

$$(\partial_t - M)\Pi^{(0)}(t, t_0) = \delta(t - t_0)I \quad (44)$$

[2] A seguir consideramos o caso perturbado. Seja uma equação matricial em que os elementos da matriz correspondente incluem termos perturbados que foram acrescentados aos elementos da matriz inicial; nesse caso, escrevemos,

$$\mathbf{u}' = (M + \varepsilon W)\mathbf{u} \quad (45)$$

sendo que  $W$  é uma matriz cujos elementos dependem do tempo e  $\varepsilon$  é um número suficientemente pequeno, o chamado de 'parâmetro perturbativo'.

De modo a resolver a equação (45), é conveniente reescrevê-la de maneira análoga à (44), mas incluindo uma perturbação, então escrevemos,

$$(\partial_t - A)\Pi(t, t_0) = \delta(t - t_0)I \quad (46)$$

sendo  $A = (M + \varepsilon W)$ . Explicitamente temos,

$$(\partial_t - M - \varepsilon W)\Pi = \delta(t - t_0)I$$

ou, reagrupando os termos,

$$(\partial_t - M)\Pi = \delta(t - t_0)I + \varepsilon W\Pi \quad (47)$$

A seguir vamos subtrair a equação (44) da equação (47), resultando,

$$(\partial_t - M)(\Pi - \Pi^{(0)}) = \varepsilon W\Pi$$

a que escrevemos explicitamente,

$$(\partial_t - M) [\Pi(t, t_0) - \Pi^{(0)}(t, t_0)] = \varepsilon W(t) \Pi(t, t_0) \quad (48)$$

Como o instante  $t_0$  é *arbitrário* na equação (44) podemos rescrever, sem nenhum inconveniente, essa equação da seguinte maneira,

$$(\partial_t - M) \Pi^{(0)}(t, t') = \delta(t - t') I \quad (49)$$

para  $t' < t$ . A identificação feita acima sobre a arbitrariedade do instante  $t_0$  é chave para este problema; vejamos isso. Multiplicando a equação (49) por  $\varepsilon W(t') \Pi(t', t_0)$ , sendo que  $t' > t_0$ , obtemos,

$$(\partial_t - M) \Pi^{(0)}(t, t') \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) = \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) \delta(t - t') I \quad (50)$$

para  $t_0 < t' < t$ .

Integrando a equação (50) para a variável  $t'$ , entre  $t_0$  e  $t$ , temos:

$$\int_{t_0}^t (\partial_t - M) \Pi^{(0)}(t, t') \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) dt' = \int_{t_0}^t \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) \delta(t - t') dt'$$

Sendo que a integração acima é realizada com relação à variável  $t'$  e que a operação de derivação parcial é realizada com relação à variável  $t$  temos que as correspondentes operações comutam, por isso, pode-se escrever,

$$(\partial_t - M) \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t') \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) dt' = \varepsilon W(t) \Pi(t, t_0) \quad (51)$$

Comparando a equação (48) com a equação (51) pode-se fazer a seguinte *interpretação*: o termo  $\Pi(t, t_0) - \Pi^{(0)}(t, t_0)$  pode ser considerado como o resultado da integral,

$$\int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t') \varepsilon W(t') \Pi(t', t_0) dt'$$

como consequência disso, escrevemos,

$$\Pi(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t')W(t')\Pi(t', t_0)dt' \quad (52)$$

Mas, ainda não foi resolvida a equação (45). Uma solução para essa equação surge olhando para (52) como uma expressão que é parte de um procedimento de aproximações sucessivas.

Nesse contexto, temos que a aproximação de ordem 'zero', ou simplesmente 'aproximação zero', é a seguinte.

$$\Pi^{(0)}(t, t_0) = \Pi^0(t, t_0) = e^{(t-t_0)M} \quad (t > t_0) \quad (53)$$

A 'aproximação um' escreve-se como.

$$\Pi^{(1)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t')W(t')\Pi^{(0)}(t', t_0)dt' \quad (54)$$

A 'aproximação dois' é a seguinte,

$$\Pi^{(2)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t')W(t')\Pi^{(1)}(t', t_0)dt' \quad (55)$$

ou, de maneira explícita,

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(t, t_0) = & \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t')W(t') \times \\ & \times \left\{ \Pi^{(0)}(t', t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t'} \Pi^0(t', t'')W(t'')\Pi^0(t'', t_0)dt'' \right\} dt' \end{aligned} \quad (56)$$

Generalizando, para a '*n*-ésima aproximação', temos,

$$\Pi^{(n)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t') W(t') \Pi^{(n-1)}(t', t_0) dt' \quad (57)$$

A aproximação será cada vez melhor conforme estejamos nos aproximando da situação de convergência das sucessivas aproximações, que se manifesta-se quando,

$$\Pi^{(n+1)} - \Pi^{(n)} \rightarrow 0 \quad (58)$$

para  $n \rightarrow \infty$ . Assim, a solução da equação (45) é,

$$\mathbf{u} = \Pi^{(n)}(t, t_0) \mathbf{u}(t_0) \quad (59)$$

em  $n$ -ésima aproximação.

## 4.2. RESOLVENDO UMA E.D.O. COM COEFICIENTES CONSTANTES PELOS MÉTODOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção seguindo as ref.[2], ref.[3] e ref.[4] vamos resolver uma equação diferencial ordinária (E.D.O.) com coeficientes constantes, a mesma que não tem nenhuma relação com um problema físico. Será conveniente transformar aquela equação diferencial em uma equação matricial, o que será útil na próxima seção, pois na correspondente matriz serão acrescentados os termos perturbativos, ficando assim em condições de se aplicar a técnica de Feynman, que foi apresentada em um contexto não físico na seção 4.1.

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária com coeficientes constantes.

$$Y'''(t) - 6Y''(t) + 12Y'(t) - 8Y(t) = 0 \quad (60)$$

com as condições iniciais:  $Y(0) = c_1$ ;  $Y'(0) = c_2$ ;  $Y''(0) = c_3$ .

Vamos definir um vetor  $\mathbf{u}$  cujas componentes são tais que,

$$u_1 = Y; u_2 = Y'; u_3 = Y'' \quad (61)$$

do anterior podem-se estabelecer as relações,

$$\begin{aligned} u_1' &= Y' = u_2 \\ u_2' &= Y'' = u_3 \\ u_3' &= Y''' = 6Y'' - 12Y' + 8Y = 6u_3 - 12u_2 + 8u_1 \end{aligned}$$

O vetor  $\mathbf{u}$  escreve então como,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \end{bmatrix} \quad (62)$$

Para a condição inicial ao tempo  $t_0$ , temos.

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \\ Y''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Depois de derivar a equação (62) podemos escrever,

$$\partial_t \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 6u_3 - 12u_2 + 8u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

A equação (64) pode-se escrita, de maneira simplificada,

$$\partial_t \mathbf{u} = M\mathbf{u} \quad (65)$$

onde  $M$  e a matriz que aparece em (64) ,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Multiplicando a equação (65) por  $e^{-tM}$ , temos.

$$e^{-tM}\mathbf{u}' - e^{-tM}M\mathbf{u} = 0$$

Note-se que  $M$  comuta com  $e^{-tM}$ . Na expressão acima reconhecemos a derivada de um produto, então escrevemos,

$$(e^{-tM}\mathbf{u})' = 0$$

que pode ser integrada diretamente,

$$e^{-tM}\mathbf{u} = a_1$$

Em consequência,

$$\mathbf{u}(t) = e^{tM}a_1 \tag{67}$$

Fazendo  $t = 0$  temos,

$$\mathbf{u}(0) = a_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0$$

Logo, a solução da equação matricial (65) tem a forma,

$$\mathbf{u}(t) = e^{tM}\mathbf{u}_0 \tag{68}$$

Note-se que (68) é apenas uma solução formal, no sentido que ainda não temos calculado a matriz exponencial. O mais simples de se fazer nesta etapa é tentar determinar algumas propriedades da matriz  $M$  que possam ser úteis. Então vamos calcular os autovalores e autovetores da matriz  $M$ , Seja a equação de autovalores e autovalores,

$$MX = \lambda X \tag{69}$$

Explicitamente escrevemos,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (70)$$

de onde surgem as relações,

$$y = \lambda x \quad (71)$$

$$z = \lambda y \quad (72)$$

$$8x - 12y + 6z = \lambda z \quad (73)$$

No procedimento usualmente encontrado nos livros de álgebra linear, depois de determinar os autovalores calculam-se, separadamente, para cada autovalor encontrado, os correspondentes autovetores. Aqui seguimos o procedimento não usual da ref. [2]. Substituindo (71) em (72), temos,

$$z = \lambda^2 x \quad (74)$$

Substituindo (71) e (74) em (73), temos.

$$8x - 12\lambda x + 6\lambda^2 x = \lambda^3 x$$

de onde resulta,

$$\lambda^3 x - 6\lambda^2 x + 12\lambda x - 8x = 0$$

$$x(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0$$

$$x(\lambda - 2)^3 = 0$$

concluindo-se que  $\lambda = 2$  com multiplicidade igual a 3 e  $x$  tendo valor arbitrário. O autovetor correspondente,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \\ \lambda^2 x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Sendo  $x$  arbitrário pode-se escolher para ele o valor  $x = 1$ ; com isso, temos,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (75)$$

O vetor  $\mathbf{X}$  é o único autovetor linearmente independente da matriz  $M$ . Em consequência, a matriz  $M$  não pode ser diagonalizada por uma matriz não singular (se teríamos associado com o autovalor  $\lambda = 2$  três autovetores linearmente independentes então essa matriz seria diagonalizável). No entanto, de acordo com um teorema da álgebra linear, sabe-se que uma matriz com autovalores distintos  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  e com as multiplicidades  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ , respectivamente, é semelhante a uma *matriz canônica de Jordan*.

Para cada autovalor  $\lambda_i$  de multiplicidade  $m_i$ ; pode-se construir  $m_i$  vetores linearmente independentes:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Para um novo vetor a parti de (75).

$$(M - \lambda I)\mathbf{Y} = \mathbf{X} \quad (76)$$

Substituindo (66) e (75) na equação (76), obtemos.

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações para  $y$ .

$$-2x + y = 1$$

$$-2y + z = 2$$

$$8x - 12y + 4z = 4$$

Assim, temos outro vetor a parti de (66) e (75).

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-y}{2} \\ y \\ 2+2y \end{bmatrix}$$

Para  $y = 1$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Para um novo vetor a parti de (66) e (77), temos.

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \quad (78)$$

Substituindo (66) e (77) em (78), obtemos.

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$-2y + z = 1$$

$$8x - 12y + 4z = 4$$

Resolvendo o sistema de equação para  $z$ .

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-1}{4} \\ \frac{z-1}{2} \\ z \end{bmatrix}$$

Para  $z = 1$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Se (75), (77) e (79) forem linearmente independentes, então podemos construir uma matriz de mesmo tamanho que (66).

$$k_1\mathbf{X} + k_2\mathbf{Y} + k_3\mathbf{Z} = \mathbf{0}$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 0$$

$$2k_1 + k_2 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$$4k_1 + 4k_2 + k_3 = 0$$

$$k_3 = 0$$

Os vetores (75), (77) e (79) são linearmente independentes.

Seja uma matriz  $T$  que é composta pelos vetores (75), (77) e (79).

$$T = [\mathbf{X} \quad \mathbf{Y} \quad \mathbf{Z}]$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Se o  $\text{rank}(T) = \text{tamanho da matriz}$  então  $T$  possui inversa,  $T^{-1}$ .

A matriz inversa a  $T$  é dado por.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

A matriz de Jordan é, por construção, semelhante à matriz  $M$ .

$$J = T^{-1}MT \quad (82)$$

Substituindo (66), (80) e (81) em (82) obtemos,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$J = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 2I + A \quad (84)$$

Separado (83) em duas matrizes obtemos (84).

Sendo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Para um termo exponencial elevado a  $J$  (Jordan) e expandindo em Taylor obtemos.

$$e^{tJ} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{tJ}{n!}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n \quad (86)$$

Dessa forma, obtemos uma relação entre (66) e (83) em sua forma exponencial.

$$e^{tJ} = T^{-1}e^{tM}T \quad (87)$$

$$e^{tM} = Te^{tJ}T^{-1} \quad (88)$$

Substituindo (84) em (88), temos.

$$\begin{aligned} e^{tM} &= Te^{t(2I+A)}T^{-1} \\ e^{tM} &= Te^{2tI}e^{tA}T^{-1} \end{aligned} \quad (89)$$

Expandindo em Taylor  $e^{2tI}$  e  $e^{tA}$ , temos.

$$e^{2tI} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2tI)^n}{n!} = Ie^{2t} = e^{2t} \quad (90)$$

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \dots = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2} \quad (91)$$

Substituindo (85) em (91), sendo.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para  $A^n$  sendo  $n \geq 3$ ,  $A^n \rightarrow 0$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Substituindo (80), (81), (90) e (92) em (89), temos.

$$e^{tM} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tM} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 2t + 2t^2 & t - 2t^2 & t^2/2 \\ 4t^2 & 1 - 2t - 4t^2 & t^2 + t \\ 8t^2 + 8t & -8t^2 - 12t & 2t^2 + 4t + 1 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Assim a solução da equação (68) é dada substituindo (63) e (93) em (68).

$$\mathbf{u}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 2t + 2t^2 & t - 2t^2 & t^2/2 \\ 4t^2 & 1 - 2t - 4t^2 & t^2 + t \\ 8t^2 + 8t & -8t^2 - 12t & 2t^2 + 4t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Incluindo as condições iniciais de (63)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 2t + 2t^2 & t - 2t^2 & t^2/2 \\ 4t^2 & 1 - 2t - 4t^2 & t^2 + t \\ 8t^2 + 8t & -8t^2 - 12t & 2t^2 + 4t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fazendo o produto de matrizes e utilizando apenas a primeira linha, obtemos a solução da equação diferencial linear.

$$Y(t) = e^{2t} \left[ c_1(1 - 2t + 2t^2) + c_2(t - 2t^2) + c_3 t^2/2 \right] \quad (95)$$

A expressão (95) é a solução da equação (60).

#### 4.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEYNMAN A UMA E.D.O. COM COEFICIENTES PERTURBADOS

Agora vamos utilizar o método perturbativo em uma EDO, seguimos as ref.[2], ref.[3] e ref.[4], para o caso perturbado, sendo que já se sabe a solução da equação (60) não perturbado, incorporando o termo perturbado  $\varepsilon$  na equação (60), sendo esse parâmetro perturbativo  $\varepsilon$  muito pequeno, dentro dos coeficientes da equação (60).

Aplicando os coeficientes perturbados nas constantes da equação (60).

$$Y'''(t) - (6 + \varepsilon t^2)Y''(t) + (12 + \varepsilon t)Y'(t) - 8Y(t) = 0 \quad (96)$$

Em sua forma matricial.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \end{bmatrix} \quad (97)$$

Com suas condições iniciais.

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \\ Y''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Derivando a equação (97), obtemos.

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y' \\ Y'' \\ Y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ (6 + \varepsilon t^2)u_3 - (12 + \varepsilon t)u_2 + 8u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 - \varepsilon t & 6 + \varepsilon t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (99)$$

A equação (99) em sua forma matricial diferenciado.

$$\mathbf{u}' = B\mathbf{u} \quad (100)$$

Separando a equação (99) em duas matrizes, temos.

$$\mathbf{u}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & t^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Onde  $B = A + \varepsilon W$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & t^2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Dessa forma a equação (100) pode ser escrita em termos de (102) e (103).

$$\mathbf{u}' = B\mathbf{u} = (A + \varepsilon W)\mathbf{u} \quad (104)$$

A solução da equação (97) é obtida a parti da equação (59).

$$\mathbf{u}(t) = \Pi^{(n)}(t, t_0)\mathbf{u}_0$$

Sendo  $\Pi^{(n)}(t, t_0)$  uma matriz temporal, para encontramos a solução da equação (97) perturbado, tem-se que resolver a matriz de propagação temporal.

Como foi visto no capítulo (4.1), equação (54), em primeira aproximação.

$$\Pi^{(1)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t \Pi^{(0)}(t, t') W(t') \Pi^{(0)}(t', t_0) dt'$$

Sendo  $t_0 = 0$ , temos.

$$\Pi^{(0)}(t, t_0) = \Pi^{(0)}(t) = e^{(tA)} \quad (105)$$

Sendo que  $t - t' = g$  na equação (105), obtemos.

$$\Pi^{(0)}(t, t') = e^{\{(t-t')A\}} = e^{(gA)} \quad (106)$$

A equação (106) é resolvida análoga a equação (68), dessa forma obtém.

$$e^{gA} = e^{2g} \begin{bmatrix} 1 - 2g + 2g^2 & g - 2g^2 & g^2/2 \\ 4g^2 & 1 - 2g - 4g^2 & g^2 + g \\ 8g^2 + 8g & -8g^2 - 12g & 2g^2 + 4g + 1 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Para a matriz temporal (106) sendo em aproximação “zero”.

$$\Pi^{(0)}(t, t') = e^{(gA)} = e^{2g} \begin{bmatrix} 1 - 2g + 2g^2 & g - 2g^2 & g^2/2 \\ 4g^2 & 1 - 2g - 4g^2 & g^2 + g \\ 8g^2 + 8g & -8g^2 - 12g & 2g^2 + 4g + 1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Da expressão (103) também temos.

$$W(t') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t' & (t')^2 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Para a matriz temporal (106) em aproximação “zero” temos.

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}(t', t_0) &= \Pi^{(0)}(t') = \\ e^{2t'} &\begin{bmatrix} 1 - 2t' + 2(t')^2 & t' - 2(t')^2 & (t')^2/2 \\ 4(t')^2 & 1 - 2t' - 4(t')^2 & (t')^2 + t' \\ 8(t')^2 + 8t' & -8(t')^2 - 12t' & 2(t')^2 + 4t' + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (110)$$

Multiplicando a equação (109) pela equação (110), temos.

$$\begin{aligned} W(t')\Pi^{(0)}(t', t_0) &= \\ e^{2t'} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [8(t')^4 + 4(t')^3] & \begin{bmatrix} -8(t')^4 - 8(t')^3 \\ +2(t')^2 - t' \end{bmatrix} & [2(t')^4 + 3(t')^3] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (111)$$

Da equação (108) também temos.

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}(t, t') &= e^{2(t-t')} \times \\ &\begin{bmatrix} 1 - 2(t-t') + 2(t-t')^2 & (t-t') - 2(t-t')^2 & (t-t')^2/2 \\ 4(t-t')^2 & 1 - 2(t-t') - 4(t-t')^2 & (t-t')^2 + (t-t') \\ 8(t-t')^2 + 8(t-t') & -8(t-t')^2 - 12(t-t') & 2(t-t')^2 + 4(t-t') + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (112)$$

Multiplicando a equação (111) por (112) obtemos a matriz  $S$ .

$$\Pi^{(0)}(t, t')W(t')\Pi^{(0)}(t', t_0) = S \quad (113)$$

Sendo

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (114)$$

Cada componente da matriz  $S$  resulta da multiplicação em (113)

$$S_{11} = e^{2t} \left[ 4(t')^6 + (t')^5(2 - 8t) + (t')^4(4t^2 - 4t) + 2t^2(t')^3 \right] \quad (115)$$

$$S_{12} = e^{2t} \times \left[ \begin{aligned} & -4(t')^6 - (t')^5(8t + 4) + (t')^4(-4t^2 + 8t + 2) - (t')^3 \left( 4t^2 + 2t + \frac{1}{3} \right) \\ & + (t')^2(t^2 + t) - \frac{1}{2}t^2(t') \end{aligned} \right] \quad (116)$$

$$S_{13} = e^{2t} \left[ (t')^6 + (t')^5 \left( \frac{3}{2} - 2t \right) + (t')^4(t^2 - 3t) + \frac{3}{2}t^2(t')^3 \right] \quad (117)$$

$$S_{21} = e^{2t} \left[ 8(t')^6 - (t')^5(16t + 4) + (t')^4(8t^2 - 4) + (t')^3(4t^2 + 4t) \right] \quad (118)$$

$$S_{22} = e^{2t} \times \left[ \begin{aligned} & -8(t')^6 + 16t(t')^5 + (t')^4(-8t^2 + 8t + 10) - (t')^3(8t^2 + 12t + 3) \\ & + (t')^2(2t^2 + 4t + 1) - (t')(t^2 + t) \end{aligned} \right] \quad (119)$$

$$S_{23} = e^{2t} \left[ 2(t')^6 - (t')^5(4t - 1) + (t')^4(2t^2 - 4t - 3) + (t')^3(3t^2 + 3t) \right] \quad (120)$$

$$S_{31} = e^{2t} \left[ \begin{aligned} & 6(t')^6 - (t')^5(32t + 24) + (t')^4(16t^2 + 16t + 16) \\ & + (t')^3(8t^2 + 16t + 4) \end{aligned} \right] \quad (121)$$

$$S_{32} = e^{2t} \begin{bmatrix} -16(t')^6 + (t')^5(32t + 16) + (t')^4(-16t^2 + 28) \\ -(t')^3(16t^2 + 40t + 14) + \\ (t')^2(4t^2 + 12t + 6) - (t')(2t^2 + 4t + 1) \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$S_{33} = e^{2t} \begin{bmatrix} 4(t')^6 - (t')^5(8t + 2) + (t')^4(4t^2 - 4t - 10) \\ +(t')^3(6t^2 + 12t + 3) \end{bmatrix} \quad (123)$$

Agora vamos determinar separadamente cada um dos termos por integração cada componente da matriz  $P$ . Sendo  $P$ .

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$P_{11} = \int_0^t S_{11} d(t')$$

$$P_{11} = \int_0^t e^{2t} \left[ 4(t')^6 + (t')^5(2 - 8t) + (t')^4(4t^2 - 4t) + 2t^2(t')^3 \right] d(t')$$

$$P_{11} = e^{2t} \left[ \frac{4}{105} t^7 + \frac{1}{30} t^6 \right] \quad (125)$$

$$P_{12} = \int_0^t S_{12} d(t')$$

$$P_{12} = \int_0^t e^{2t} \left[ -4(t')^6 - (t')^5(8t + 4) + (t')^4(-4t^2 + 8t + 2) \right. \\ \left. - (t')^3 \left( 4t^2 + 2t + \frac{1}{3} \right) + (t')^2(t^2 + t) - \frac{1}{2} t^2(t') \right] d(t')$$

$$P_{12} = e^{2t} \left[ -\frac{284}{105} t^7 - \frac{1}{15} t^6 + \frac{7}{30} t^5 \right] \quad (126)$$

$$P_{13} = \int_0^t S_{13} d(t')$$

$$P_{13} = \int_0^t e^{2t} \left[ (t')^6 + (t')^5 \left( \frac{3}{2} - 2t \right) + (t')^4 (t^2 - 3t) + \frac{3}{2} t^2 (t')^3 \right] d(t')$$

$$P_{13} = e^{2t} \left[ \frac{1}{105} t^7 - \frac{11}{120} t^6 \right] \quad (127)$$

$$P_{21} = \int_0^t S_{21} d(t')$$

$$P_{21} = \int_0^t e^{2t} \left[ 8(t')^6 - (t')^5 (16t + 4) + (t')^4 (8t^2 - 4) + (t')^3 (4t^2 + 4t) \right] d(t')$$

$$P_{21} = e^{2t} \left[ \frac{8}{105} t^7 + \frac{1}{3} t^6 + \frac{1}{5} t^5 \right] \quad (128)$$

$$P_{22} = \int_0^t S_{22} d(t')$$

$$P_{22} = \int_0^t e^{2t} \left[ \begin{array}{l} -8(t')^6 + 16t(t')^5 + (t')^4 (-8t^2 + 8t + 10) \\ -(t')^3 (8t^2 + 12t + 3) + (t')^2 (2t^2 + 4t + 1) - (t')(t^2 + t) \end{array} \right] d(t')$$

$$P_{22} = e^{2t} \left[ -\frac{8}{105} t^7 - \frac{2}{5} t^6 - \frac{1}{3} t^5 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{6} t^3 \right] \quad (129)$$

$$P_{23} = \int_0^t S_{23} d(t')$$

$$P_{23} = \int_0^t e^{2t} \left[ 2(t')^6 - (t')^5 (4t - 1) + (t')^4 (2t^2 - 4t - 3) + (t')^3 (3t^2 + 3t) \right] d(t')$$

$$P_{23} = e^{2t} \left[ \frac{2}{105} t^7 + \frac{7}{60} t^6 + \frac{3}{20} t^5 \right] \quad (130)$$

$$P_{31} = \int_0^t S_{31} d(t')$$

$$P_{31} = \int_0^t e^{2t} \left[ \frac{6(t')^6 - (t')^5(32t + 24) + (t')^4(16t^2 + 16t + 16)}{(t')^3(8t^2 + 16t + 4)} \right] d(t')$$

$$P_{31} = e^{2t} \left[ -\frac{134}{105}t^7 + \frac{6}{5}t^6 + \frac{36}{5}t^5 + t^4 \right] \quad (131)$$

$$P_{32} = \int_0^t S_{32} d(t')$$

$$P_{32} = \int_0^t e^{2t} \left[ \frac{-16(t')^6 + (t')^5(32t + 16) + (t')^4(-16t^2 + 28) - (t')^3(16t^2 + 40t + 14) + (t')^2(4t^2 + 12t + 6) - (t')(2t^2 + 4t + 1)}{(t')^3(8t^2 + 16t + 4)} \right] d(t')$$

$$P_{32} = e^{2t} \left[ -\frac{16}{105}t^7 - \frac{32}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{5}{3}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right] \quad (132)$$

$$P_{33} = \int_0^t S_{33} d(t')$$

$$P_{33} = \int_0^t e^{2t} \left[ \frac{4(t')^6 - (t')^5(8t + 2) + (t')^4(4t^2 - 4t - 10) + (t')^3(6t^2 + 12t + 3)}{(t')^3(6t^2 + 12t + 3)} \right] d(t')$$

$$P_{33} = e^{2t} \left[ \frac{4}{105}t^7 + \frac{11}{30}t^6 + t^5 + \frac{3}{4}t^4 \right] \quad (133)$$

Sendo a equação (96) perturbada com as condições iniciais inclusas na solução para uma matriz temporal (59), em primeira aproximação, expresso em (54).

$$\mathbf{u}(t) = \Pi^{(1)}(t, t_0)\mathbf{u}_0 = \Pi^{(0)}(t, t_0) + \varepsilon P \quad (134)$$

Sendo a matriz temporal (53) em aproximação “zero”.

$$\Pi^{(0)}(t, t_0) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 2t + 2t^2 & t - 2t^2 & t^2/2 \\ 4t^2 & 1 - 2t - 4t^2 & t^2 + t \\ 8t^2 + 8t & -8t^2 - 12t & 2t^2 + 4t + 1 \end{bmatrix} = V$$

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \quad (135)$$

Substituindo a equação (135) e (124) na equação (104).

$$\mathbf{u}(t) = [V + \varepsilon P] \mathbf{u}_0$$

Obtemos,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \\ Y''(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (136)$$

A solução da equação (96) perturbada com seus coeficientes de perturbação, a parti de (136) é expresso por.

$$Y(t) = c_1(V_{11} + \varepsilon P_{11}) + c_2(V_{12} + \varepsilon P_{12}) + c_3(V_{13} + \varepsilon P_{13}) \quad (137)$$

Substituindo (125), (126), (127) e (135) na equação (137) a solução da equação (96) para o caso perturbativo.

$$\begin{aligned} Y(t) = & c_1 e^{2t} \left[ (1 - 2t + 2t^2) + \varepsilon \left( \frac{4}{105} t^7 + \frac{1}{30} t^6 \right) \right] \\ & + c_2 e^{2t} \left[ (t - 2t^2) + \varepsilon \left( -\frac{284}{105} t^7 - \frac{1}{15} t^6 + \frac{7}{30} t^5 \right) \right] \\ & + c_3 e^{2t} \left[ (t^2/2) + \varepsilon \left( \frac{1}{105} t^7 - \frac{11}{120} t^6 \right) \right] \end{aligned} \quad (138)$$

A solução da equação diferencial perturbado é dada pela expressão (138). Dessa forma, mostra-se que utilizando métodos da formulação de Feynman, pode-

se aplicar a um caso mais simples, no caso uma equação diferencial. Mas a solução não é exata, o próprio método perturbativo expressa soluções aproximadas.

## 5. DEDUÇÃO FORMAL DAS EXPRESSÕES NO MÉTODO PERTURBATIVO DE FEYNMAN

Com base nas ref.[3] e ref.[4], consideremos a expressão formal que define o propagador de Feynman correspondente à evolução que vai do ponto  $(t_0, x_0)$  para o ponto  $(t, x)$ ,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, t_0, x_0, q)} \quad (139)$$

A funcional de Ação pode ser separada em dois termos, sendo que o primeiro corresponde à Ação da partícula livre e o segundo corresponde ao potencial físico, da seguinte maneira,

$$\sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, t_0, x_0, q)} = \sum_q \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_0(q)\right] \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V(t, q(t)) dt\right] \quad (140)$$

Expandindo em série de Taylor a exponencial mais a direita na expressão acima temos,

$$\sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x, t_0, x_0, q)} = \sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q)} \left\{ 1 + \sum_{n=1} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \left(\int_{t_0}^t V(t, q(t)) dt\right)^n \right\} \quad (141)$$

dessa forma a expressão (141), pode ser escrita na forma.

$$K(t, x, t_0, x_0) = \sum_q e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q)} + \sum_q \sum_{n=1} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q)} \left(\int_{t_0}^t V(t, q(t)) dt\right)^n \quad (142)$$

Percebe-se que o propagador  $K$  pode ser escrito como uma soma de termos,

$$K = K_0 + (K_1 + K_2 + \dots) \quad (143)$$

Lembremos que no método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger, usualmente apresentado nas disciplinas de mecânica quântica de graduação em física, é a função de onda a que é aproximada sucessivamente; já no caso do método perturbativo de Feynman, é o propagador quântico quem é aproximado.

Determinemos, separadamente,  $K_1$  e  $K_2$ .

Fazendo  $n = 1$  na somatória temos,

$$K_1 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_q e^{\frac{i}{\hbar}S_0(q)} \int_{t_0}^t V(t', q(t')) dt'$$

com  $t_0 < t' < t$ . Considerando que na expressão acima a operação de integração e a soma são operações que comutam pode-se reescrever ela da seguinte maneira,

$$K_1 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t \sum_q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\int_{t_0}^{t'} \mathcal{L}_0 + \int_{t'}^t \mathcal{L}_0\right)\right] \times V(t', q(t')) dt' \quad (144)$$

Para continuar será conveniente dividir os caminhos  $q$ ; ou seja, fazer  $q \equiv q_1 \cup q_2$  como mostrado na figura 1.

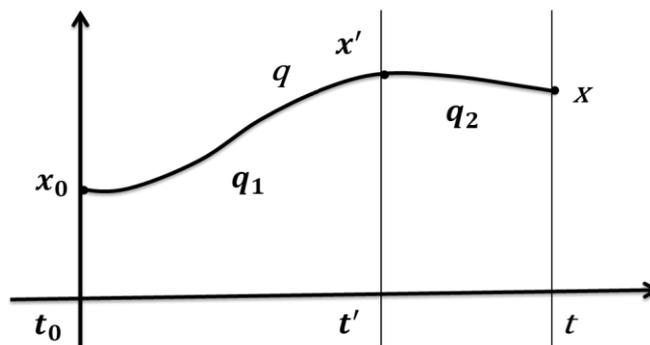


Fig. 1. Mostra-se o “truque” para dividir o caminho em caminhos para um tempo intermediário  $t'$ .

Com isso, pode-se escrever,

$$\sum_q e^{\frac{i}{\hbar}S_0(q)} = \sum_{q_1} \sum_{q_2} e^{\frac{i}{\hbar}S_0(q_1)} e^{\frac{i}{\hbar}S_0(q_2)}$$

expressão que será de grande utilidade (esse é o grande *truque!*). Logo, o propagador pode ser expresso da seguinte maneira,

$$K_1 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q_1} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} \mathcal{L}_0(q_1)\right] \times V(t', x') \sum_{q_2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t \mathcal{L}_0(q_2)\right] dx' \right] dt' \quad (145)$$

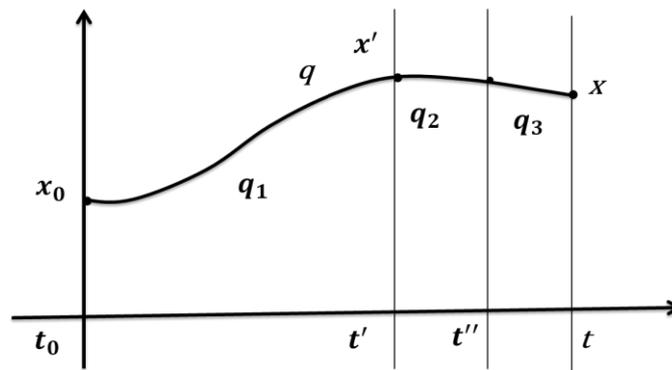
A integral infinita que aparece em (145) foi incluída porque o propagador tem que incorporar todos os possíveis caminhos (que são aqueles continuamente diferenciáveis que unem os pontos extremos fixos).

Também pode-se escrever,

$$K_1 = \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t, x, t', x') V(t', x') K_0(t', x', t_0, x_0) dx' \right] dt' \quad (146)$$

para o propagador em primeira ordem de acordo com a teoria de perturbações de Feynman.

Agora vejamos  $K_2$ . Vamos utilizar a mesma técnica e o mesmo *truque*. Podemos dividir os caminhos de maneira que  $q \equiv q_1 \cup q_2 \cup q_3$  como na figura 2 abaixo.



**Fig. 2.** Mostra-se o “truque” para dividir o caminho em caminhos para os tempos intermediários  $t'$  e  $t''$ .

Considerando o termo na somatória que define  $K(t, x, t_0, x_0)$  correspondente ao valor  $n = 2$  temos,

$$K_2 = \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_q e^{i\hbar S_0(q)} \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^{t'} V(t', q(t')) V(t'', q(t'')) dt'' \right] dt' \quad (147)$$

Para os caminhos  $q \equiv q_1 \cup q_2 \cup q_3$ , o propagador pode ser expresso como a seguir,

$$K_2 = \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sum_{q_1} e^{i\hbar S_0(q_1)} V(t', x') \times$$

$$\times \left[ \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt'' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \sum_{q_2} e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q_2)} V(t'', x'') \sum_{q_3} e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q_3)} \right] \quad (148)$$

ou também,

$$K_2 = \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t, x, t', x') V(t', x') \times \\ \times \left[ \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t, x, t'', x'') V(t'', x'') K_0(t'', x'', t_0, x_0) dx'' \right] dt'' \right] dx' dt' \quad (149)$$

No olhar da teoria de perturbações como considerada por Feynman um desenvolvimento perturbativo a primeira ordem escreve-se como:  $K_0$ ; à segunda ordem escreve-se como:  $K_0 + K_1$ ; à terceira ordem como:  $K_0 + K_1 + K_2$ ; etc. Pode-se ver que estes resultados correspondem com aqueles mostrados na seção 4.1.

## 6. O MÉTODO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN PODE FORNECER RESULTADOS CORRETOS USANDO UMA FUNCIONAL DISTINTA À AÇÃO?

Nesta seção seguimos as ref.[3] e ref.[6]. Nos anos 1993 e 1994, o físico Holger Valqui, professor na *Universidad Nacional de Ingeniería* (em Lima) e seu orientando Armando Acha Quimper suspeitavam que o método de Feynman também pudesse ser correto no caso de que fossem usadas outras funcionais, desde que para elas a trajetória clássica fosse uma extremal. Decidiram então considerar a seguinte variante na proposta de Feynman: em vez de usar a ação, eles usaram a funcional de *caminho óptico*,

$$\int n \cdot dl \quad (150)$$

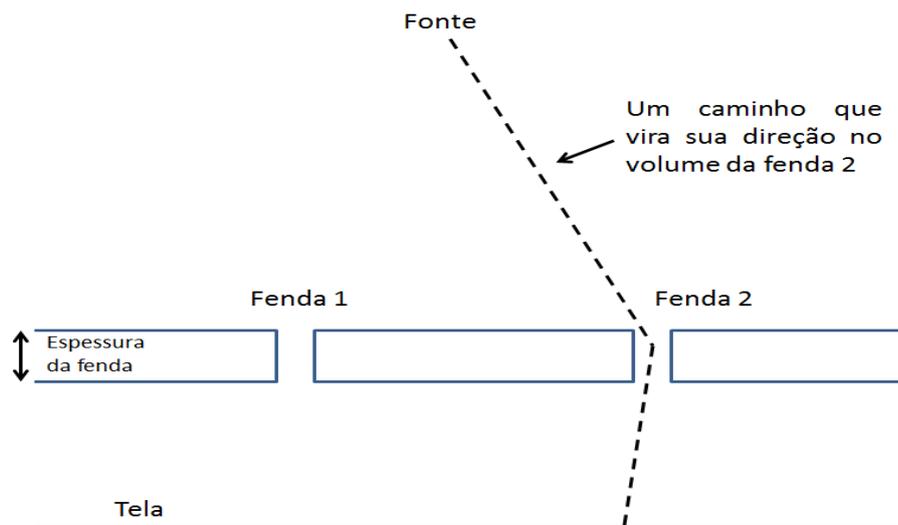
sendo que  $n$  é o índice de refração, que no caso mais geral pode mudar de ponto a ponto. Para testar a validade dessa suspeita (e dessa mudança) decidiram tentar reproduzir numericamente o padrão de difração correto para partículas quânticas (elétrons, fótons, etc.) no ‘experimento’ da dupla fenda, ref.[13]. Aquela mudança de funcional levou a considerar termos com a forma,

$$e^{(i/\lambda) \int n \cdot dl} \quad (151)$$

nas somas que definem a expressão do propagador, sendo  $\lambda$  o comprimento de onda. Os cálculos teóricos e computacionais de Valqui e Quimper mostraram que o padrão de difração correto podia ser efetivamente obtido desde que, além da altura e do comprimento das fendas, considere-se uma espessura não nula para elas<sup>2</sup> de maneira que pela região no interior do volume das fendas passem caminhos retilíneos que se ‘quebram’, vide figura 3.

---

<sup>2</sup> Espessura que sempre é desconsiderada na abordagem formal para o assunto; veja, por exemplo, a ref. [14].



**Fig. 3.** Caminho de Feynman que vira sua direção no volume da fenda 2. Quando Valqui e Quimper desconsideram os caminhos do tipo mostrada nesta figura não é possível de se obter numericamente o padrão de difração correto para as partículas quânticas.

Quando a família de caminhos que apresentam as características mostradas na figura 3 era omitida no cálculo numérico do ‘propagador de Feynman’ modificado não se conseguia o padrão de difração correto. Então Valqui e Quimper, com base nesses resultados numéricos e considerando que, sob as mesmas condições, o padrão de difração é o mesmo para qualquer partícula quântica, ref.[13], fizeram a seguinte pergunta: Quando uma partícula quântica é lançada sobre um anteparo com duas fendas, a partícula passará (se passa), necessariamente, por uma delas; então, *como sabe* a partícula da existência da segunda fenda? Se a partícula ‘não tivesse informação’, através de algum mecanismo, da presença da segunda fenda, o padrão resultante seria o mesmo que no caso da presença de apenas uma fenda. Então Valqui e Quimper, lembrando que de acordo com a teoria de perturbações de Feynman, uma partícula movimenta-se livremente até que ela interage com o potencial, num ponto do espaço-tempo, para continuar livremente ao longo de outra direção (assim como na figura 3), *interpretaram* que as partículas que passam através de uma fenda podem ‘ter notícia’ da presença da segunda fenda se um potencial atuasse no interior desta fenda<sup>3</sup>. Fisicamente, a ideia de um potencial

<sup>3</sup> Lembremos que, neste caso, como destaca Feynman, ref.[13], não se trata de uma fenda macroscópica feita num anteparo macroscópico, tratar-se-ia de fendas de dimensões atômicas!

agindo no interior das fendas não é inconsistente. Vejamos. Todo potencial físico conhecido decai (de acordo com certa lei) com o incremento da distância; assim, no caso em que as duas fendas estejam muito próximas, uma partícula passando por uma fenda sentiria intensamente (ou só sentiria) a presença da segunda fenda através do potencial gerado por esta; já no caso em que as fendas não estejam próximas, o padrão seria mais parecido com o correspondente ao caso de uma única fenda. No limite, se afastarmos o suficiente a segunda fenda o padrão de difração resultante coincidirá exatamente com aquele para uma única fenda, o que é consistente com a ideia de um potencial (gerado pela segunda fenda) que decaiu completamente a essas distâncias e que a partícula não ‘sentiu’. É conveniente enfatizar que os comentários acima *não demonstram* a existência desses potenciais no interior das fendas; trata-se de uma *interpretação* que se mostra consistente com fatos físicos. Com relação às *interpretações* na mecânica quântica é conveniente chamar a atenção do leitor ao fato de que, em alguns casos, *interpretações* são apresentadas, por descuido ou omissão, como se fossem *resultados* da mecânica quântica, ref. [4].

H. Valqui comentou na época, ref.[5], que a validade ou não da *interpretação* da existência de um potencial no interior de uma fenda somente poderia ser decidida com base em experimentos. Para esclarecer esse ponto ele diz-se: “*Um elétron lançado sobre uma ‘janela’ de dimensões atômicas não poderia comportar-se da mesma maneira como uma pedra lançada através de uma janela aberta*”. E acrescentou: “*A pedra pode passar sem problemas desde que não bata num borde da janela; já um elétron deve ter um comportamento distinto e ser afetada pela ‘janela’ inclusive se não passa perto dos bordes da mesma*”. Finalmente, fez a pergunta: “*Se um feixe de luz laser é dirigido paralelamente sobre uma superfície condutora, manifestar-se-á algum efeito sobre o feixe quando a distância entre o feixe e a superfície for diminuída progressivamente, até a ordem de algumas micras?*”. Não conhecemos a resposta experimental para essa pergunta.

## 7. ASPECTOS ELEMENTARES DA FORMULAÇÃO DE FEYNMAN DA MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

Nesta seção, com base nas ref.[3], ref.[9] e ref.[10], apresentam-se conceitos básicos e se estabelece um contexto físico parcial relativo aos métodos e técnicas usados na formulação de Feynman da mecânica quântica relativística. Falando rigorosamente, esta seção poderia ser qualificada como fisicamente limitada (o que foi inevitável), além de ser simplificada e superficial; porém, é correta e válida no seu contexto específico: possibilitar que um aluno de graduação em física tenha um primeiro contato, uma primeira notícia, sobre alguns problemas e métodos usados na física através de outras formulações. O leitor não deveria esperar encontrar nesta seção o que poderia ser chamado de ‘material essencial’ sobre esses assuntos, para isso deveria consultar referências apropriadas.

### 7.1 O CONTEXTO FÍSICO, ALGUMAS DEFINIÇÕES E A ‘REGRA DE OURO’

Nesta subseção seguimos as ref.[3] e ref.[10]. Fenômenos físicos notáveis que se manifestam no nível microscópico são, entre muitos outros:

- (i) O decaimento de uma partícula elementar em outra (ou em outras) partícula(s) e,
- (ii) O processo de espalhamento de uma partícula por outra partícula.

O decaimento de uma partícula é caracterizado de maneira estatística através do conceito de *tempo de vida média* ( $\tau$ ). É a natureza estatística deste processo a que justifica a seguinte pergunta: Antes que aconteça de fato o decaimento de uma partícula, qual é a probabilidade de ela decair no próximo intervalo de tempo  $dt$ ? Os físicos definiram então o conceito *razão de decaimento* ( $\Gamma$ ) para uma partícula do tipo A como a probabilidade, por unidade de tempo, de que qualquer partícula A desintegre-se. Assim, o *tempo de vida média* resulta ser igual à inversa da *razão de decaimento*,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (152)$$

Com relação a um processo de espalhamento define-se a *seção transversal de espalhamento* ou a *seção eficaz de espalhamento* ( $\sigma$ ) como o número médio de partículas que incidem sobre um detector (cuja área exposta corresponde à seção transversal de um cone) de ângulo sólido  $d\Omega$  por unidade de tempo com relação ao número de partículas que incidiram sobre a unidade de área do alvo por unidade de tempo,

$$d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (153)$$

Na  $f(\theta, \varphi)$  que é chamada de *amplitude de dispersão* e  $d\sigma/d\Omega$  é a *seção diferencial de espalhamento*.

Por outro lado, lembremos que, no contexto da mecânica quântica, fala-se de uma *transição* num dado processo à passagem (de um estado inicial em vários possíveis estados finais) promovida pelas interações: internas, no caso do decaimento de uma partícula, ou as que se manifestam entre as partículas, no caso do espalhamento. Considerando o caráter estatístico destes processos pode-se falar da *probabilidade da ocorrência de uma transição* ou da *probabilidade de transição*, colocado brevemente; e também da *probabilidade de transição por unidade de tempo*, etc. Particularmente interessante é a *razão temporal de mudança da probabilidade de transição total* (que considera todos os estados finais), a que é chamada brevemente como *razão de transição*. Sob certas condições, ref. [10], a chamada de *Regra de Ouro* de Fermi expressa uma *razão de transição* constante, a que fica expressa da seguinte maneira,

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |A|^2 \rho(E^0) \quad (154)$$

Em que  $A$  é a amplitude para o processo considerado,  $E^0$  é a energia do estado inicial (não perturbado) e  $\rho(E^0)$  é a densidade de estados (não perturbados) finais.

O  $w$  na expressão (154) não poderia corresponder a  $\Gamma$  ou  $\sigma$  (pois estes estão relacionados com determinadas probabilidades e não com a mudança dessas

probabilidades), mas pode corresponder a  $d\Gamma$  ou  $d\sigma$ , segundo seja o caso. De acordo com a formulação de Feynman da mecânica quântica relativística, a amplitude  $A$ , que aparece na expressão (154), é calculada através do uso das regras e dos *diagramas de Feynman* relevantes; já a densidade de estados finais,  $\rho(E^0)$ , é calculada diretamente, pois ela não carrega informação sobre a dinâmica do processo. Na seguinte subseção vamos apresentar brevemente e de maneira simplificada as regras de Feynman e descrever o que é um diagrama de Feynman, começando pelo segundo assunto.

## 7.2. DIAGRAMAS DE FEYNMAN E REGRAS DE FEYNMAN (PARA PARTÍCULAS COM ESPIN ZERO)

Com base nas ref.[3], ref.[9] e ref.[10], um *diagrama de Feynman* é uma coleção de pontos e linhas que estão conectadas entre si representando a propagação de partículas (no espaço-tempo) e suas interações (consideradas como sendo instantâneas e atuantes em um ponto, não em regiões do espaço). As regras estabelecidas por Feynman colocam em correspondência *diagramas* com *amplitudes* de ocorrência do processo considerado; isso é feito através de informações específicas atribuídas a cada ponto (vértice) e a cada linha (externa ou interna) do diagrama. Dito com outras palavras pode-se construir uma expressão analítica para a amplitude  $A$  para o processo correspondente, a partir do diagrama, a uma determinada ordem de aproximação, depois de arrumar os elementos atribuídos no diagrama e de efetuar as devidas operações. Para cada possível diagrama de Feynman que seja consistente com o processo considerado haverá um termo para a amplitude, de maneira que a amplitude total será a soma dessas contribuições parciais, veja as ref. [8] e ref.[9].

Na ref. [9], que aqui seguimos, é apresentando o método dos diagramas de Feynman considerando partículas com espin zero, o que possibilita simplificar a sua apresentação, pois desta maneira evitam-se as complicações matemáticas que surgem quando se consideram processos reais, com partículas carregando espin distinto de zero. A seguir as regras propriamente ditas.

Regra I.

Todo diagrama de Feynman tem tantas linhas exteriores (entrantes e salientes) como partículas iniciais e finais existem no total. Também há linhas internas. Para caracterizar adequadamente essas linhas, usar letras distintas para os 4-*momentums*<sup>4</sup> das partículas; use, por exemplo,  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , para as partículas ao longo das linhas exteriores e  $q_1, q_2, q_3, \dots$  para as partículas virtuais ao longo das linhas internas. Essa notação será assumida aqui.

Regra II

Associado com cada vértice de um diagrama de Feynman tem-se um fator da forma  $-ig$ , em que  $i$  é o número imaginário e  $g$  é a ‘constante de acoplamento’, que está relacionada com a intensidade das interações que operam entre as partículas. A quantidade de vértices no diagrama expressa a ordem de aproximação da teoria de perturbações.

Regra III.

Associada com cada linha interna de um diagrama de Feynman tem-se um fator da forma:  $\left\{ \frac{i}{(q_l^2 - m_l^2 c^2)} \right\}$ , chamado *propagador*, em que o índice  $l$  corresponde à linha considerada. As linhas internas correspondem às chamadas de ‘partículas virtuais’.

Regra IV.

Associado com cada vértice de um diagrama de Feynman, em que acontece uma interação, a energia e o momentum totais tem que ser conservados. Isso faz com que seja associada uma ‘função’ delta Dirac, com a forma  $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3)$ , em cada vértice (estamos supondo o caso particular de três partículas, em que uma desintegra-se em duas). O termo  $k_i$  representa o 4-*momentum* da partícula  $i$  chegando ao (ou saindo do) vértice.

Regra V.


---

<sup>4</sup> Conceito que é uma generalização do *momentum* no espaço 3-dimensional. Em geral, chama-se vetor 4-dimensional ou 4-vetor o conjunto de quatro magnitudes que ao passar a outro sistema de referencia inercial transformam-se de igual maneira que as 4-coordenadas.

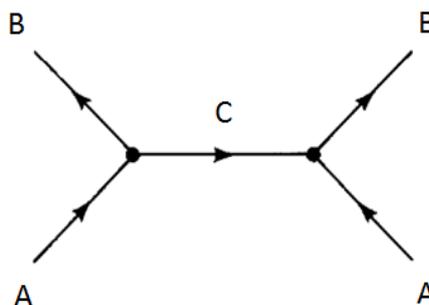
Associada com cada linha interna de um diagrama de Feynman tem-se ter um fator da forma,  $\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_l$ , então integre-se sobre os *momentums* internos associados com todas as linhas internas.

#### Regra VI.

Apagar a ‘função’ delta Dirac que sobra após a integração (incluindo o coeficiente numérico do tipo apresentado na Regra IV); o que resultar será um termo proporcional à amplitude:  $-iA$ .

### 7.3. APLICAÇÃO DAS REGRAS DE FEYNMAN NUM PROCESSO DE ESPALHAMENTO

Aqui se repete o exemplo que aparece na página 205 da ref. [9], mas aqui os cálculos são apresentados de maneira completa e detalhada e colocando comentários complementares. Considere o processo de espalhamento  $A + A \rightarrow B + B$ , em que as partículas  $A$  e  $B$  tem spin zero, processo representado na figura 4. O propósito desta seção será calcular a amplitude  $A$  de ocorrência do processo de espalhamento considerado usando, justamente, o diagrama de Feynman na figura 1.



**Fig. 4.** Representação do diagrama de Feynman.

O diagrama na Fig. 4 apresenta dois vértices, quatro linhas externas e uma linha interna. De acordo com a **Regra I** escrevemos  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$  para os 4-*momentums* das partículas ao longo das linhas exteriores e  $q_1$  para o 4-*momentum* da partícula virtual ao longo da linha interna. Assignaremos  $p_1$  para a partícula incidente no lado esquerdo,  $p_2$  para a segunda partícula incidente,  $p_3$  para a partícula que saem sobre o lado esquerdo e  $p_4$  para a segunda partícula que saem.

De acordo com a **Regra II** escrever um fator total  $(-ig)^2$ . Com base na **Regra III** escrevemos o propagador (que descreve a partícula virtual) como:  $i/(q_1^2 - m_c^2 c^2)$ . A **Regra IV** leva a escrever duas 'funções' delta:  $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q_1)$ , e  $(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_1 - p_4)$ , onde foi considerado uma convenção de sinais para os 4-momentums das partículas: aquelas 'que entram' a um vértice são positivas e aquelas 'que saem' do mesmo vértice são negativas. A **Regra V** leva à integração segundo  $d^4 q_1$ . O produto dos termos e a posterior integração levam à expressão,

$$(-ig)^2 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{q_1^2 - m_c^2 c^2} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q_1) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_1 - p_4) \quad (155)$$

Simplificando temos,

$$-ig^2 (2\pi)^4 \int d^4 q_1 \left( \frac{1}{q_1^2 - m_c^2 c^2} \right) \delta^4(p_1 - p_3 - q_1) \delta^4(p_2 + q_1 - p_4) \quad (156)$$

É conveniente enfatizar que o termo  $q_1^2$ , em (155) ou (156), representa o quadrado do 4-momentum da partícula virtual,

$$q_1^2 = (E_c/c)^2 - \vec{q}_1^2 \quad (157)$$

Por enquanto, vamos desconsiderar o coeficiente numérico na expressão (156). No integrando de (156), cada uma das 'funções' delta-Dirac desdobram-se as duas,

$$\int d^4 q_1 \left( \frac{1}{\left(\frac{E_c}{c}\right)^2 - \vec{q}_1^2 - m_c^2 c^2} \right) \times \delta\left(\frac{E_1}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_c}{c}\right) \times \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{q}_1) \\ \times \delta\left(\frac{E_c}{c} - \left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)\right) \times \delta^3(\vec{q}_1 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)) \quad (158)$$

E depois de colocar e ordenar explicitamente as integrais temos,

$$\int d^3\vec{q}_1 \left\{ \int d\left(\frac{E_C}{c}\right) \left( \frac{1}{\left(\frac{E_C}{c}\right)^2 - \vec{q}_1^2 - m_c^2 c^2} \right) \times \delta\left(\frac{E_1}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_C}{c}\right) \times \delta\left(\frac{E_C}{c} - \left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)\right) \right\} \\ \times \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{q}_1) \times \delta^3(\vec{q}_1 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)) \quad (159)$$

Realizamos primeiro a integração entre chaves usando a propriedade integral (1-dimensional) da delta-Dirac,

$$\int dx' f(x') \delta(x' - x) = f(x) \quad (160)$$

De onde resulta,

$$\int d^3\vec{q}_1 \left\{ \left( \frac{1}{\left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)^2 - \vec{q}_1^2 - m_c^2 c^2} \right) \delta\left(\frac{E_1}{c} - \frac{E_3}{c} - \left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)\right) \right\} \\ \times \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{q}_1) \times \delta^3(\vec{q}_1 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)) \quad (161)$$

Agora realizamos a segunda integração usando a propriedade integral da delta-Dirac generalizada para o caso 3 dimensional,

$$\int d^3 r' f(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (162)$$

Resultando,

$$= \left( \frac{1}{\left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)^2 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)^2 - m_c^2 c^2} \right) \times \delta\left(\frac{E_1}{c} - \frac{E_3}{c} - \left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)\right) \times \delta^3 \\ \times (\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)) \quad (163)$$

Ou, equivalentemente,

$$= \left( \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_c^2 c^2} \right) \times \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 + p_2) \quad (164)$$

Acrescentando os coeficientes que foram deixados de fora, temos,

$$-ig^2 \left( \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_c^2 c^2} \right) \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 + p_2) \quad (165)$$

Aplicando a **Regra VI** chega-se à expressão para a amplitude<sup>5</sup>,

$$A = g^2 \left( \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_c^2 c^2} \right) \quad (166)$$

Antes de terminar esta breve seção dá-se mais um passo. Na ref. [9], continuando dentro do contexto em que só temos partículas com espin zero, apresentam-se os cálculos para determinar a *seção diferencial de espalhamento* para duas partículas, no referencial de centro de massa, com independência do conhecimento da amplitude  $A$ . A seguir, apresentam-se cálculos e uma expressão formal para a *seção de espalhamento* ( $\sigma$ ) no referencial de laboratório, para o diagrama de Feynman considerado na Fig. 4 e usando a expressão do  $A$  encontrada em (166); essa expressão formal não aparece realizada em aquela referência, o que pode ser verificado.

Começemos escrevendo a expressão para a *razão de transição* correspondente ao espalhamento considerado (em que aparece a densidade de estados finais). Segundo a ref. [9] temos,

---

<sup>5</sup> Aproveitamos a oportunidade para chamar a atenção do leitor para um 'descuido' na expressão (6.49), página 205, da ref. [9], em que aparece o termo  $(p_4 - p_2)$  em vez de  $(p_4 - p_2)^2$ . Esse erro, a pesar de ser pequeno, não deveria estar presente naquela referência, pois todo bom livro deve fazer jus a um adequado *controle de qualidade* do material oferecido.

$$d\sigma = \frac{|A|^2 \hbar^2 S}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2]^{1/2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\ \times \left( \frac{cd^3\vec{p}_3}{2E_3(2\pi)^3} \right) \left( \frac{cd^3\vec{p}_4}{2E_4(2\pi)^3} \right) \quad (167)$$

Em problemas deste tipo se tem interesse, por razões experimentais, apenas na direção em que emerge uma partícula, por exemplo, a que chamaremos de '3' no esquema simbólico de espalhamento:  $(1 + 2 \rightarrow 3 + 4)$ . Assim, tem que se fazer a integração completa com relação a  $d^3\vec{p}_4$  e a integração com relação à magnitude de  $\vec{p}_3$ , então escreve-se,

$$\sigma = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S}{[(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2]^{1/2}} \int \frac{|A|^2}{E_3 E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^3\vec{p}_4 d^3\vec{p}_3 \quad (168)$$

Desconsiderando momentaneamente o fator na frente das integrais e substituindo a expressão para a amplitude temos,

$$\int \frac{g^4 \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} - \frac{E_4}{c}\right)}{c^2 [(\vec{p}_3^2 - m_3^2 c^2)(\vec{p}_4^2 - m_4^2 c^2)]^{1/2} \left[ \left(\frac{E_4}{c} - \frac{E_2}{c}\right)^2 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)^2 - m_c^2 c^2 \right]} \times \delta^2 \\ \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) d^3\vec{p}_4 d^3\vec{p}_3 \quad (169)$$

Considerando explicitamente as expressões para as energias  $E_3$  e  $E_4$  resulta,

$$\int \frac{g^4 \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \left[(m_3^2 c^2 - \vec{p}_3^2)^{1/2} - \left[(m_4^2 c^2 - \vec{p}_4^2)^{1/2}\right]\right)}{c^2 [(\vec{p}_3^2 - m_3^2 c^2)(\vec{p}_4^2 - m_4^2 c^2)]^{1/2} \left[ \left( \left[ (m_4^2 c^2 - \vec{p}_4^2)^{1/2} - \frac{E_2}{c} \right]^2 - (\vec{p}_4 - \vec{p}_2)^2 - m_c^2 c^2 \right)} \right]} \times \delta^3 \\ \times (\vec{p}_4 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)) d^3\vec{p}_4 d^3\vec{p}_3 \quad (170)$$

sendo que se manifesta diretamente a dependência de  $\vec{p}_3$  e  $\vec{p}_4$  no integrando. A integração com relação a  $d^3\vec{p}_4$  fornece,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{g^4 \delta \left( \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - [(m_3^2 c^2 - \vec{p}_3^2)]^{\frac{1}{2}} - [(m_4^2 c^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2)]^{\frac{1}{2}} \right)}{c^2 [(\vec{p}_3^2 - m_3^2 c^2) ((\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2 - m_4^2 c^2)]^{\frac{1}{2}}} \times \\
& \times \frac{1}{\left[ \left( [(m_4^2 c^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2)]^{\frac{1}{2}} - \frac{E_2}{c} \right)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 - m_c^2 c^2 \right]} d^3 \vec{p}_3 \quad (171)
\end{aligned}$$

Assim, chegamos à seguinte expressão formal,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S}{[(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2]^{1/2}} \times \\
& \times \int \frac{g^4 \delta \left( \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - [(m_3^2 c^2 - \vec{p}_3^2)]^{\frac{1}{2}} - [(m_4^2 c^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2)]^{\frac{1}{2}} \right)}{c^2 [(\vec{p}_3^2 - m_3^2 c^2) ((\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2 - m_4^2 c^2)]^{\frac{1}{2}}} \times \\
& \times \frac{1}{\left[ \left( [(m_4^2 c^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2)]^{\frac{1}{2}} - \frac{E_2}{c} \right)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 - m_c^2 c^2 \right]} d^3 \vec{p}_3 \quad (172)
\end{aligned}$$

onde a integral deve ser realizada sobre todos os possíveis valores da magnitude do vetor  $\vec{p}_3$ . O coeficiente  $S$  resulta definido através de fatores de natureza estatística.

## 8. UMA NOVA APLICAÇÃO: SOBRE A EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES DE SCHRÖDINGER E FEYNMAN NO CONTEXTO DE NOVAS LAGRANGEANAS.

Nesta seção, seguindo a ref.[15], utilizando-se dos conteúdos anteriores apresentados neste TCC, é possível atacar o seguinte problema: As formulações de Feynman e de Schrödinger da mecânica quântica não-relativística se mantêm equivalentes no contexto de novas Lagrangeanas? Esse problema está sendo abordado por mim como um aluno de IC.

Para a equação de Schrödinger unidimensional, tem-se associado a essa equação um determinado Lagrangeano  $\mathcal{L}_1$  para um campo.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (173)$$

Para um novo caso, introduzindo um termo multiplicado pela segunda derivada da função onda em relação ao tempo na equação (173), obtemos.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (174)$$

Para essa nova equação tem-se que adaptar  $\alpha$  de forma que o Lagrangeano associado a essa nova equação, também satisfaz a equação (173).

Como é visto no capítulo 3, o propagador de Feynman satisfaz a equação de Schrödinger, mas se utilizamos a Lagrangeana associada a equação (174) será que esse Lagrangeana também satisfaz o propagador de Feynman?

Na literatura de Mecânica Quântica não tem sido discutido o assunto de como fica essa equivalência no contexto de novas Lagrangeanas. Espera-se que seja preservado no caso em que sejam consideradas, não as Lagrangeanas ordinárias, senão Lagrangeanas “não padrões”.

## CONCLUSÕES

No capítulo 2 deste trabalho seguindo a ref.[1] são apresentados em forma resumida os aspectos do propagador quântico pela formulação de Feynman da Mecânica Quântica e dois casos como o de uma partícula livre e uma partícula submetida a um potencial linear.

No capítulo 3 verifica-se que o propagador de Feynman satisfaz a equação de Schrödinger.

Também é revidado o método perturbativo em um problema mais simples, uma EDO linear, seguindo a ref.[2], resolvendo um problema distinto ao da referência, assim aprendendo de uma forma pratica o método.

E feita à dedução forma do método perturbativo para o propagador de Feynman, obtendo soluções aproximadas.

E apresentado de forma introdutória à mecânica quântica relativística com alguns conceitos e definições, algumas regras, também é apresentado de maneira introdutória o diagrama de Feynman e uma aplicação no processo de espalhamento.

Este trabalho de conclusão, além de oferecer uma introdução da formulação de Feynman da Mecânica Quântica, também será utilizado como base para um trabalho em andamento de IC com o tema “Sobre a equivalência da formulação de Feynman e a equação de Schrödinger”. Assim, como sistematicamente é visto na graduação a equação de Schrödinger para os processos quânticos, este trabalho tem o fundamento de introduzir a formulação de Feynman como complemento na formação do aluno.

## REFERÊNCIAS

- [1] Bulnes, J.D. *Propagadores cuánticos calculados de acuerdo con el postulado de Feynman con caminos aproximados por polinomios*, Revista Mexicana de Física, vol. **55**, Num. 1, junio, 2009, pp.34-43.
- [2] Bulnes, J.D., *Una aplicación inusual del método perturbativo de Feynman de la mecánica cuántica*, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. **6**, No. 4, Dec. 2012.
- [3] Bulnes, J.D., *Uma Introdução aos Conceitos e Métodos da Mecânica Quântica* (livro em preparação, registrado como projeto de extensão na UNIFAP em 2013).
- [4] Valqui, H. G., *Notas de Mecánica Cuántica e Integrales de camino*, UNI (Lima).
- [5] Bulnes, J.D., “*Sobre las correlaciones no locales e instantáneas atribuidas a un sistema cuántico entrelazado*”, (submetido à *Latin-American Journal of Physics Education* em 2013).
- [6] Bulnes, J.D., *Cartas y conversaciones con el físico Holger Valqui*, (não publicado).
- [7] Butkov, *Física Matemática*, LTC, Rio der Janeiro, 1988.
- [8] Achuthan, P. Karuppath, N., *Aspects of Feynman Graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 33, 43, (2009).
- [9] Griffiths, D., *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, 1987.
- [10] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, 1961.
- [11] Sokolov, A.A., Ternov, I.M., Zhukovski, V.CH., Borisov, A.V., *Electrodinámica Cuántica*, Editorial Mir Moscú (edição em espanhol), 1989.
- [12] Feynman, R.P., *QED, The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton, 1988.
- [13] Feynman, R. P., *Lições de Física, Mecânica Quântica*, volume 3.
- [14] Barut, A.O. and Basri, S. Path integrals and quantum interference, Am. J. Phys., **60**(10), 896, October 1992.
- [15] Silva, W. P., Bulnes, J.D., Projeto de Iniciação Científica com o título “Sobre a equivalência entre as formulações de Schrödinger e Feynman no contexto de novas lagrangeanas”, Registrado no DPQ-UNIFAP, 2014.

## APÉNDICE A

Com base nas ref.[3] e ref.[4], dada a integral (A1) sua solução não trivial, sendo a integral (A1) em um plano real, como técnica pode-se expandir de um plano real para um plano complexo, depois analisando para o plano real, dessa forma, facilita-se na obtenção do resultado para a expressão (A1)

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{i\alpha x^2} dx \quad (A1)$$

Sendo  $\alpha \rightarrow \alpha + i\sigma$ , dessa forma, temos

$$F(\alpha + i\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{i\alpha x^2} e^{-\sigma x^2} dx \quad (A2)$$

Utilizando a técnica de integração por parte que é expresso pela equação (A3) na expressão (A2) e escrevendo suas partes, obtemos,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (A3)$$

as partes da integral são dados por,

$$u = e^{-\sigma x^2} \quad (A4)$$

$$du = -2\sigma x e^{-\sigma x^2} dx \quad (A5)$$

$$dv = x e^{i\alpha x^2} dx \quad (A6)$$

$$v = F(\alpha) \quad (A7)$$

substituindo as expressões (A4), (A5), (A6) e (A7) em (A3), temos,

$$F(\alpha + i\sigma) = [e^{-\sigma x^2} F(\alpha)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) (-2\sigma x e^{-\sigma x^2} dx) \quad (A8)$$

obtemos a expressão (A9).

$$F(\alpha + i\sigma) = 2\sigma F(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\sigma x^2} dx \quad (A9)$$

Se  $M(x) = x e^{-\sigma x^2}$  que é a função integrando da expressão (A9), então,

$$M(-x) = -x e^{-\sigma x^2} \quad (A10)$$

$$M(-x) = -M(x) \quad (A11)$$

$M$  é função ímpar, dessa forma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x) dx = 0 \quad (A12)$$

$$F(\alpha + i\sigma) = 0 \quad (A13)$$

sendo  $\forall \sigma > 0$ . Em particular a solução da expressão (A1) é,

$$F(\alpha) = 0 \quad (A14)$$

para  $\sigma = 0$ .

## APÉNDICE B

Com base na ref.[3] e ref.[4], para a expressão (B1), a solução é dado a parti da técnica de integração por parte.

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{i\alpha x^2} dx \quad (B1)$$

Separando a função integrando da expressão (B1) como está escrito na equação (B2), temos.

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 (x e^{i\alpha x^2}) dx \quad (B2)$$

Utilizando a técnica de integração por parte como foi expreso na equação (A3), utilizando a expressão (A3), e separando por parte a equação (B2),

$$u = x^2 \quad (B3)$$

$$du = 2x dx \quad (B4)$$

$$dv = x e^{i\alpha x^2} dx \quad (B5)$$

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{i\alpha x^2} dx = 0 \quad (B6)$$

substituindo (B3), (B4), (B5) e (B6) na equação (A3), obtemos,

$$G(\alpha) = [x^2(0)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (0) 2x dx = 0 \quad (B7)$$

dessa forma a solução de (B1).

$$G(\alpha) = 0 \quad (B8)$$