UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ - REITORIA DE ENSINO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA

JANAINA DE NAZARÉ BORGES DE FREITAS

EXPERIMENTO DIDÁTICO COM A BRAQUISTÓCRONA E OUTRAS CURVAS

MACAPÁ

2020

JANAINA DE NAZARÉ BORGES DE FREITAS

EXPERIMENTO DIDÁTICO COM A BRAQUISTÓCRONA E OUTRAS CURVAS

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Especialização em Ensino de Física da Universidade Federal do Amapá como requisito parcial para a obtenção do grau de Especialista em Ensino de Física.

Orientador: Profa. Dra. Jackeline Del Rosario Collave García

MACAPÁ
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Cristina Fernandes– CRB-2/1569

Freitas, Janaina de Nazaré Borges de.
Experimento didático com a braquistócrona e outras curvas. / Janaina de Nazaré Borges de Freitas; orientadora, Jackeline Del Rosário Collave Garcia. – Macapá, 2020.
30 f.

Monografia (Especialização) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Especialização em Ensino de Física.

1. Braquistócrona. 2. Tautócrona. 3. Ciclóide. 4. Proposta didática. I. Garcia, Jackeline Del Rosário Collave, orientadora. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

530.1 F866e
CDD. 22 ed.

JANAÍNA DE NAZARÉ BORGES DE FREITAS

EXPERIMENTO DIDÁTICO COM A BRAQUISTÓCRONA E OUTRAS CURVAS

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de *Especialização em Ensino de Física* da Universidade Federal do Amapá como requisito parcial para a obtenção do grau de Especialista em Ensino de Física.

DATA DE APROVAÇÃO ___/____/____

____

Prof. Dra. Jackeline Del Rosario Collave García

Orientadora

____

Prof. Dr. Robert Ronald Maguiña Zamora

Membro da Banca

____

Prof. Dr. Yony Walter Milla Gonzales

Membro da Banca

Macapá

2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, sem ele nada disso seria possível. A minha orientadora, a professora Dra. Jackeline Del Rosario Collave García, pela aprendizagem, meu esposo Eder Oliveira Santos por ser meu apoiador e incentivador. Aos meus familiares, pelo amor, incentivo e apoio. A todos os meus professores do colegiado de Física que socializaram e repassaram-nos o devido conhecimento. Aos amigos, Valéria, Marcelo, Edenil, Cincinato, Rafael Willian e Edgar, com os quais convivi durante toda a especialização. Em fim toda minha gratidão de ter conhecido excelentes professores durante todo o curso, estes sim foram fundamentais para que eu tivesse chegado até aqui com a convicção de ser um eterno aprendiz.

A imaginação é mais importante que o conhecimento.

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho será construído um experimento didático adequado para alunos de ensino médio, introduzindo o conteúdo de forma que a curiosidade deste seja instigada com encaminhamentos metodológicos capazes de tornar o aprendizado mais prazeroso e interativo. Nesse experimento construiremos: uma rampa em forma de uma reta, uma parábola e uma braquistócrona. O objetivo é mostrar qual das trajetórias percorridas por dois móveis, bola de gude e um bloco polido, no plano vertical, consegue o menor tempo possível entre dois pontos pré-fixados e pela ação da gravidade local. O embasamento teórico por trás de minimizar o tempo numa trajetória de uma partícula entre dois pontos no plano vertical é o cálculo variacional e o princípio de Fermat, das quais são obtidas as equações de movimento de Euler-Lagrange mostrando que a trajetória(curva) que minimiza o tempo de percurso da partícula resulta ser uma curva Ciclóide invertida, que neste caso é chamada de braquistócrona. Denomina-se braquistócrona a trajetória de um móvel, que sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito, com velocidade inicial nula e cada vez que rola no percurso muda sua velocidade final. Pretendemos, com a elaboração deste trabalho, mostrar que o estudo das curvas e das suas propriedades como sua velocidade, o tempo e o atrito são pertinentes no ensino básico. Consideramos que poderá ser apresentado como uma proposta metodológica de ensino através da curiosidade e análise dos estudantes.

Palavras-chave: Braquistócrona. Tautócrona. Ciclóide. Proposta Didática.

ABSTRACT

In this work, a didactic experiment suitable for high school students will be built, introducing the content in such a way that its curiosity is instigated with methodological guidelines capable of making learning more pleasant and interactive. In this experiment we will build: a ramp in the shape of a line, a parabola and a brachistochrone. The objective is to show which of the trajectories traveled by two furniture, marble and one polished block, in the vertical plane, achieves the shortest possible time between two pre-fixed points and by the action of local gravity. The theoretical basis behind minimizing the time on a particle trajectory between two points in the vertical plane is the variational calculation and the Fermat principle, from which the Euler-Lagrange equations of motion are obtained, which is equivalent to the equations of motion Newton. For our specific case, the solutions of the Euler-Lagrange equations show that the path (curve) that minimizes the particle travel time turns out to be an inverted cycloid curve, which in this case is called brachistochrone. The trajectory of a particle is called brachistochrone, which is subjected to a constant gravitational field, without friction, with zero initial velocity and each time it rolls along the path it changes its final velocity. We intend, with the elaboration of this thesis, to show that the study of curves and their properties such as their speed and time is relevant in basic education. We believe that it can be presented as curiosity and analysis by students.

Keywords: Brachistochrone. Tautochron. Cycloid. Didactic Proposal.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando se pergunta a um estudante o que acontece quando três bolinhas são soltas de alturas diferentes em pistas simétricas (será o caso deste experimento) a resposta mais intuitiva que se espera (como a de uma criança) é que a bolinha solta de uma menor altura atinja o ponto mínimo mais rapidamente. Outra curiosidade ocorre se perguntarmos qual a trajetória mais rápida para ir de um ponto a outro no plano. A resposta mais intuitiva que se espera é que a trajetória deve ser uma reta. A sociedade é norteada por princípios de máximos e mínimos. Por exemplo, quando alguém quer comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo trabalho em um determinado tempo ou ainda alcançar um objetivo executando o menor esforço.

No trabalho será desenvolvido, o experimento da Braquistócrona, envolvendo uma linha reta, uma parábola e uma Ciclóide invertida. A palavra **Braquistócrona** é formada por dois sufixos gregos, brakhistop que significa o menor e chronus que significa tempo, refere-se à curva que une dois pontos **A** e **B**, que pertencem ao mesmo plano vertical, onde o ponto **A** está acima do ponto **B**, sobre a qual uma partícula partindo do repouso desliza apenas sob a ação da gravidade, no menor tempo. Nesse sentido, com base nos estudos em 1696 do matemático Johann Bernoulli (1667-1748), desafiou vários matemáticos, inclusive Isaac Newton que também contribuiu para resolução do problema.

> ” Dado um plano vertical e dois pontos **A** e **B** sobre o plano, com **A** mais alto do que **B**, e um ponto móvel **M**, determinar uma curva ao longo da qual uma partícula material desliza no menor tempo possível de **A** até **B**, considerando apenas a ação da gravidade, sem atrito.” (BARON, 1985 apud COELHO, 2008, p. 22).

O estudo da Braquistócrona será aplicado através do experimento como proposta didática interdisciplinar para o ensino médio, analisando a diferença entre tempos, comprimentos, altura e atrito correlacionados a linha reta e as curvas em estudo, passando pelo mesmo ponto.

Durante nosso estudo será expresso um breve conceito acerca das curvas rolantes (Ciclóides) as definições de cada curva, bem como suas propriedades, serão apresentadas e justificadas. A obtenção do cálculo variacional é baseada na observação presente na configuração geométrica que possibilita a obtenção de cada curva.

A Tautócrona, é uma Ciclóide invertida, faz com que um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) atinja o ponto mais baixo da curva após um intervalo de tempo que independa da altura em que foi solto. Esta também é usada para resolver o problema da curva braquistócrona, quando utilizada somente a metade de uma Ciclóide, dando origem à trajetória de um corpo que sob a ação de seu peso passa de um ponto inicial a um ponto final num intervalo de tempo mínimo.

Para entender a demonstração das equações que descrevem Tautócrona e a Braquistócrona devemos ver como se constrói geometricamente uma Ciclóide e também como se obtém as equações que as caracterizam.

A ferramenta matemática utilizada para solucionar os dois problemas e a demonstração das equações é o chamado cálculo diferencial e integral. Faremos uma breve introdução e referências históricas a contagem e também um pouco de aplicações.

Poderá ser feita uma avaliação diagnóstica antes da aplicação dos experimentos e uma avaliação formativa ao final deste, baseando-se nos questionários propostos com atividades exploradoras, as quais encontram-se anexadas a este trabalho que envolvem o problema da Braquistócrona. Usando sempre experiências concretas, dentro da realidade do estudante como exemplo a pista de skate e por fim a construção e demonstração da experiência na prática, sem deixar de levar em consideração as perguntas intuitivas como “quem tem o menor tempo” se tratando da braquistócrona ou ainda “quem chega no ponto mais baixo primeiro” na mesma curva com alturas diferentes referindo a Tautócrona. Ao contrário do que nossa intuição possa sugerir o percurso mais rápido de uma esfera (por exemplo) ao longo de uma trajetória que una dois pontos fixos a diferentes alturas não é uma linha reta. Esse menor tempo é obtido se a bola percorrer uma linha em forma de Ciclóide. No desenvolvimento do trabalho encontraremos uma explicação clara e científica sobre o problema comprovando que a Cicloide (Braquistócrona) é a que levará menor tempo para chegar no final do percurso.

Espera-se que as atividades aqui sugeridas possam ser aplicadas por professores do Ensino Médio, em parte ou na íntegra. Acredita-se que tais atividades podem ser aplicadas em forma de oficinas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Curva Ciclóide possui uma história rica, uma matemática elaborada e aplicações diretas com a Física. Suas curvas derivadas chamam atenção pela beleza que criam, inclusive, chegando a influenciar o mundo da moda (BRAGGS, 2010). Na ciência, cada vez mais trabalhos têm aparecido envolvendo a Ciclóide, sendo ela sempre a "solução" dos problemas. Outro problema que envolve a Ciclóide é o da Tautócrona, encontrado por Christiaan Huygens na construção de um relógio de pêndulo. Esse problema consistia em determinar uma curva cujo tempo de queda de uma partícula seja sempre o menor.

O Cálculo Variacional tem sido uma ferramenta básica no estudo de vários problemas matemáticos e das mais variadas áreas do conhecimento como: Física, Matemática, Engenharia, Física Moderna, entre outras. As ideias precursoras do Cálculo Variacional são antigas. Hoje com o uso de formulações variacionais para as leis da Física, torna-se possível concentrar em um único funcional todos os aspectos intrínsecos do problema em questão. Essas formulações podem servir não apenas para unificar diversos campos, mas também para sugerir novas teorias e fornecer maneiras poderosas de estudar a existência e solução de diversas equações diferenciais parciais.

Logo com base no problema criou-se um experimento prático para comparar e comprovar o tempo de queda de três curvas, sendo uma delas a Ciclóide. Utilizado no experimento, ou seja, a Braquistócrona.

Em junho de 1696, na revista Acta Eruditorum, fundada por Gottfried Wilhelm Leibniz, o matemático suíço Jean Bernoulli publicou um problema que chamou a atenção dos maiores matemáticos e físicos da época. O problema consistia em encontrar a forma que deveria ter uma trajetória sobre a qual uma partícula deslizaria, partindo do repouso e sob ação apenas da gravidade, levando o menor tempo possível para atingir um outro ponto mais abaixo nessa trajetória. Nas palavras de Bernoulli: "Dados dois pontos **A** e **B** em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de **A** até **B** em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida \`a gravidade" (Jean Bernoulli, 1696). Leibniz enviou o problema por carta aos maiores matemáticos da época. A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive pelo próprio Leibniz, além de Isaac

Newton e os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Nesta solução, todos indicaram que a curva mais rápida era uma Ciclóide, também denominada Braquistócrona.

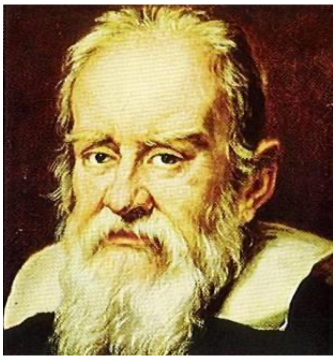
A palavra Braquistócrona nos remete a época em que Galileu investigou qual foi a curva que corresponde à mais rápida descida de um corpo sob ação da gravidade entre dois pontos horizontalmente separados e situados em níveis com alturas diferentes. Galileu erroneamente achava que um quadrante de circunferência ligando os dois pontos era a solução. A história esperou até Bernoulli encontrar que a solução correta era uma semiciclóide ligando os dois pontos.

2.1 CICLÓIDE E TAUTÓCRONA

Muito antes de receber esse nome, a curva começou a ser estudada por Nicholas Cusa (1471 – 1464) e pelo teólogo matemático francês, Charles Bouvalles (1471 – 1553). O estudo de Cusa e Bouvalles ainda não tratava da Ciclóide em si, mas algo muito próximo a ela: a quadratura da circunferência.

Em 1564, nasce o italiano Galileu Galilei (ver figura 1), cientista, artista, com uma genialidade eminente (BUSTILLOS; SASSINE, 2011).

Figura 1 – Galileu Galilei



Fonte: Retirado de Cremonezi (2013).

Galileu um dia estava na janela, apenas observando o ambiente, quando começou a reparar no movimento da roda de uma charrete que passava. Interessado em descobrir que curva esse movimento podia gerar, Galileu utilizou, primeiramente, chapas metálicas para demonstrá-la. Sem muito sucesso, ele sugeriu que a curva poderia formar um belo arco de uma ponte, nesse sentido chegou a uma hipótese que a área do arco da Ciclóide é exatamente três vezes a área do círculo que a gera (BOYER, 1996). De fato, ele estava correto, o que foi demonstrado, posteriormente, por Roberval (1602 - 1675), mas quem batizou a curva como Ciclóide foi Galileu.

A “Helena da matemática” e o “Pomo da discórdia” foram nomes que representaram a Curva Ciclóide no século XVI, tamanha era a discussão que ela gerou na época. O frade Marin Mersenne (1588 – 1688), colega de René Descartes, que é conhecido pela sua famosa fórmula “primos de Mersenne”, também participou dessa história. Por intermédio de um colega da igreja em que trabalhou, conheceu os trabalhos de Galileu e em 1630 propôs um desafio para Descartes, Fermat, Roberval e outros matemáticos da época: sugeriu que a Ciclóide fosse a curva utilizada para os diferentes testes infinitesimais, gerando assim discussões sobre a curva.

Roberval demonstrou corretamente o que Galileu havia proposto e chegou, inclusive, a outras propriedades da curva, porém, não publicou seu trabalho. (BUSTILLOS; SASSINE, 2011).

Independentemente de Roberval, Evangelista Torricelli (1608 – 1647) interessou-se pela Ciclóide, por sugestão de Mersenne ou Galileu, os quais admirava grandemente (EVES, 2011). Em 1644, Torricelli publicou sua obra intitulada *De parabole*, na qual inclui tanto a quadratura da Ciclóide quanto à construção da tangente Roberval, que até então não havia publicado seu trabalho, acusou Torricelle de plágio, o que não é verdade, visto que seus trabalhos foram independentes, embora Roberval o tenha feito primeiro (BUSTILLOS; SASSINE, 2011).

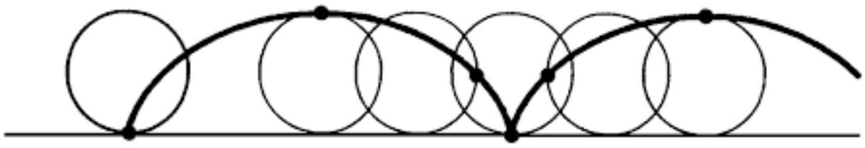
No ano de 1658, Blaise Pascal (1623-1662), sentiu uma dor de dente fortíssima e não estava conseguindo dormir por isso. Ao meio da dor, resolveu se distrair estudando a curva Ciclóide, e para seu espanto, a dor sumiu. Tomou isso como um sinal de Deus, mostrando que estudar a matemática não lhe desagradava (BOYER, 1996). Pascal então propôs alguns problemas sobre a resolução da Ciclóide, propondo premiações (que não aconteceram) aos participantes (BUSTILLOS; SASSINE, 2011).

Após esse período, a Ciclóide só voltou a ser discutida quando apareceram os problemas da Tautócrona e da Braquistócrona.

A Ciclóide é uma curva que descreve um ponto de uma circunferência, quando esta roda sem deslizar sobre uma reta. É a curva de descida mais rápida para conectar dois pontos dados.

Vamos pensar em uma roda de carro que apresenta um ponto fixo para observação. Agora, pensando nessa roda em movimento, sobre uma rua lisa, vamos observar a trajetória desse ponto fixo. A curva descrita por esse ponto é a curva Ciclóide (Figura 2).

Figura 2 – A curva Ciclóide criada pela roda de um carro que gira ao longo de uma rua lisa.



Fonte: retirado de Reginaldo (2012).

Essa curva foi observada por Galileu enquanto olhava pela janela uma charrete passando na rua. Intrigado com a curva que enxergou quando a roda da charrete fazia um movimento completo, resolveu estudá-la, utilizando conceitos da Física, e a nomeou de “Cicloide” (BUSTILLOS; SASSINE, 2011). Uma formalização da definição de Ciclóide foi feita por Coelho (2008, p. 12), que diz que "é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola sobre uma reta sem deslizar”.

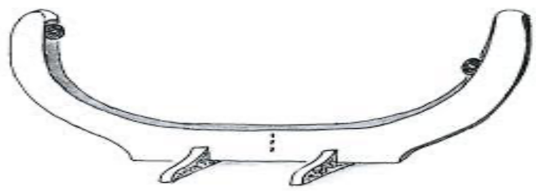
A curva Ciclóide é a representação gráfica das resoluções dos problemas chamados “Braquistócrona”.

O nome “Braquistócrona” vem do grego brakhisto (rápido) e chronos (tempo), logo falamos da curva que permite a um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) realizar um mesmo percurso unindo dois pontos dados em menor tempo (não em distância).

A Ciclóide também se dá o nome de Tautócrona (tempos iguais) consiste em determinar a curva plana ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e sujeito somente à força da gravidade desliza até ao ponto mais baixo da curva sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida.

O problema da curva Tautócrona intrigou vários matemáticos no século XVII (BUSTILLOS e SASSINE, 2011). A Tautócrona é a curva que, independentemente do ponto inicial de um determinado objeto, este sempre levará o mesmo tempo para chegar ao ponto mais baixo. Ou seja, se tivermos dois objetos ou mais sobre a Tautócrona, em pontos diferentes (um mais alto e outro mais baixo), todos chegarão ao mesmo tempo no ponto mais baixo como exibe figura 3:

Figura 3 - Curva Tautócrona



Fonte:upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Curva_Tautócrona_2.pdf

Quem solucionou esse problema foi o holandês Cristhian Huygens (1629-1695). Nascido em Haia, Huygens (Figura 4) e seu irmão descobriram uma nova técnica de polir lentes, o que ajudou Huygens a observar vários elementos da natureza, e inclusive a descobrir os Anéis de Saturno (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Cientista renomado, foi homenageado pela NASA (Agência Espacial Americana) que batizou uma das naves exploratórias que pousou em Saturno, dia 13 de janeiro de 2006, com o nome de Huygens (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Além de ser conhecido como um grande físico de seu tempo, devido à sua teoria ondulatória da luz, a seu estudo sobre o pêndulo, à invenção do relógio de pêndulo e às leis de quedas de corpos, Huygens mostrou a importância do cálculo e trouxe contribuições para geometria (COELHO, 2008).

Figura 4 - Cristhian Huygens.

Fonte: Retirado de *History of the Magic Lantern* (2013).

A partir de seus estudos sobre o pêndulo, Huygens provou geometricamente que a Tautócrona é uma curva Ciclóide. Além disso, também provou que a evoluta (centro da curvatura) da Ciclóide é a própria Ciclóide deslocada.

Sabendo da propriedade da Tautócrona, Huygens ainda construiu um relógio de maior precisão, o que contribuiu para as navegações na localização dos navios nas longitudes (COELHO, 2008). Patenteou então o relógio como criação sua, embora o relógio de pêndulo convencional tenha sido criado por Galileu (EVES, 2011).

2.2 BREVE REVISÃO DE CÁLCULO VARIACIONAL

As ideias mais primitivas do Cálculo Variacional foram apresentadas por Aristóteles (384 – 322 a.C.), por volta de 300 a.C., onde constam pela primeira vez referências a velocidades virtuais, conceito usado em algumas abordagens de problemas de mínimos e máximos [SOUSA].

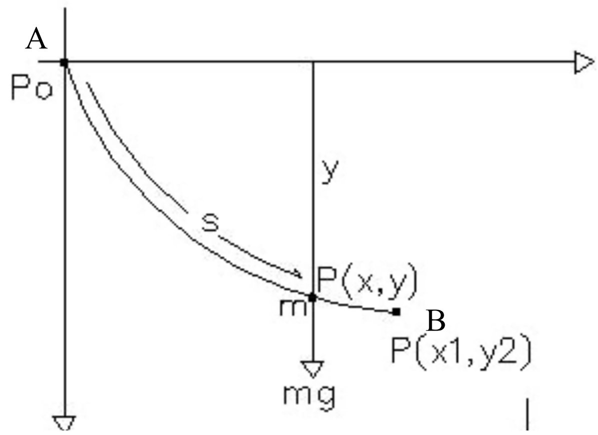
Porém, a primeira aplicação de um princípio de minimização foi feita por Herão de Alexandria (20 – 62). Ele postulou que, na reflexão por um espelho plano, a luz seguiria o caminho mais curto entre dois pontos. Uma simples análise geométrica, com conceitos abordados no ensino médio, é possível verificar que este princípio leva, corretamente, à lei da reflexão (igualdade entre os ângulos de reflexão e incidência).

Até mesmo Galileu (1564 – 1642) fez referências velocidades virtuais em alguns de seus trabalhos.

2.2.1 O Problema da Braquistócrona

O primeiro passo na resolução deste problema é encontrar o tempo que a partícula leva para se deslocar sobre uma curva *qualquer* que una A a B pois, a partir disso, poderemos variar entre todas as possíveis curvas para encontrar aquela de menor tempo [SOUSA]. Esquematizando no plano coordenado (figura 5), temos:

Figura 5 – Deslocamento da partícula sob a ação da gravidade.



Note que orientamos o eixo Y no sentido oposto ao usual. Isto é conveniente pois, neste caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo. O sistema de coordenadas também foi escolhido de modo que o ponto A fique localizado na origem. ou seja, os pontos relacionados ao problema são **A** (0, 0) e **B** (x1, y1).

Sabemos da Física que quando uma partícula atua sob a ação da gravidade, o trabalho realizado para se deslocar de **A** até um ponto **P** é igual à variação da energia cinética. Se **v** é o módulo da velocidade da partícula no ponto **P**, **y** o seu deslocamento vertical e m sua massa, temos:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.1)$$

Mas, a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido ***s*** (como podemos observar na figura 5) pelo tempo, da equação 2.1 temos

$$v = \sqrt{2gy} \qquad \text{e} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

Usando o fato que o comprimento do arco percorrido para ir de $A = (0,0)$ a $P = (x, y)$ através de uma curva que é representada pelo gráfico de uma função $y = y(x)$ é dado por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2}dx \qquad (2.2)$$

Que derivando (2.2) resulta

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2} \qquad (2.3)$$

Assim, denotando por t o tempo gasto neste trajeto, ficamos com

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{v}\sqrt{1+(y')^2} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}. \qquad (2.4)$$

Assim, para se deslocar de *A* = (0,0) a P = (x_o, y_o) basta integrar (2.4) o tempo total gasto é

$$T(x_o) = \int_0^{x_o} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx. \qquad (2.5)$$

O problema se resume a encontrar uma função $y = y(x)$ que minimize o tempo acima e o procedimento usual para a sua resolução é fazer uso do Cálculo Variacional. Mais precisamente, precisamos encontrar uma função $y = y(x)$ que satisfaça

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

Onde

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} \qquad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6), obtemos o resultado seguinte,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1 \qquad (2,8)$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$$

ou seja

$$y(1 + y'^2) = C_2 \qquad (2.9)$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos introduzir um parâmetro t considerando $y'\big(x(t)\big) = cot\ (t)$ e assim, utilizando a equação diferencial anterior, obtemos

$$y = \frac{C_2}{2}\,(1 - cos\ cos\ (2t)\,) \qquad (2.10)$$

Agora derivando $y\ \ em\ relação\ ao\ tempo\ t$, temos

$$dy = \ C_2 sen(2t)dt = 2C_2 sen(t)\ cos\ cos\ (t)\ dt$$

E como $y'(x) = \frac{dx}{dy}, então\ dx = \frac{dy}{y\prime(x)}$, assim

$$dx = \frac{2C_2 sen(t)\, cos\, cos\, (t)\, dt}{cot\, (t)} = 2C_2 sen^2(t) dt$$

Ou

$$dx = C_2(1 - cos\, cos\, (2t)\, dt$$

Ou seja

$$x(t) = C_2 t - \frac{C_2 sen(2t)}{2} + C_3 = \frac{C_2}{2}(2t - sen(2t) + C_3 \qquad (2.11)$$

Assim, a solução paramétrica da curva que minimiza o tempo da partícula em ir de **A** a **B** é dada por

$$y = \frac{C_2}{2}\,(1 - cos\, cos\, (2t)\,) \quad e \quad x(t) = \frac{C_2}{2}(2t - sen(2t) + C_3 \qquad (2.12)$$

Ainda podemos fazer $2t = t_1\ e\ sendo\ C_3 = 0, pois\ \ em\ x(0) = 0$, obtemos

$$y(t) = \frac{C_2}{2}\,(1 - cos\, cos\, (t_1)\,) \quad e \quad x(t) = \frac{C_2}{2}(2t - sen(t_1)) \qquad (2.13)$$

Que é a equação paramétrica de uma Ciclóide invertida, que chamamos de Braquistócrona.

3 A CONSTRUÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA (CICLÓIDE) E APLICAÇÕES

3.1 Proposta experimental para ser desenvolvida em sala de aula

Esta proposta experimental faz parte do trabalho que desenvolvemos sobre curvas parametrizadas. O principal objetivo da atividade experimental é incentivar aos discentes encontrar qual é a trajetória percorrida por diferentes móveis que consiste no menor tempo possível entre dois pontos, ou ainda, estes objetos soltos do repouso a partir de alturas diferentes de uma mesma Ciclóide chegando ao mesmo tempo no ponto mais baixo. Para provar experimentalmente esta propriedade, basta soltar os corpos de posições diferentes e filmar as suas trajetórias, esses experimentos poderão ser aplicados para alunos do terceiro ano do ensino médio nas áreas das Ciências Exatas. A proposta experimental, desenvolvida neste trabalho, é constituída de três etapas, a primeira consiste em obter a construção da Ciclóide, a segunda e terceira parte consiste em explorar as propriedades: o problema da Tautócrona e o problema da Braquistócrona. Levando em consideração o desafio prévio aos estudantes, através de uma pesquisa em forma de questionário de sondagem para estimular o conhecimento e em seguida uma avaliação diagnóstica.

Materiais:

• Uma cola de isopor
• Um estilete
• Uma placa de isopor de espessura 20mm
• Duas placas de isopor de espessura 10mm
• Uma roda de PVC diâmetro 30cm
• Um lápis para quadro branco
• Três bolas de gude e três blocos
• Lixa para madeira
• MDF de 15cm
• Fita adesiva (durex)
• Serra tico-tico
• Cola de MDF

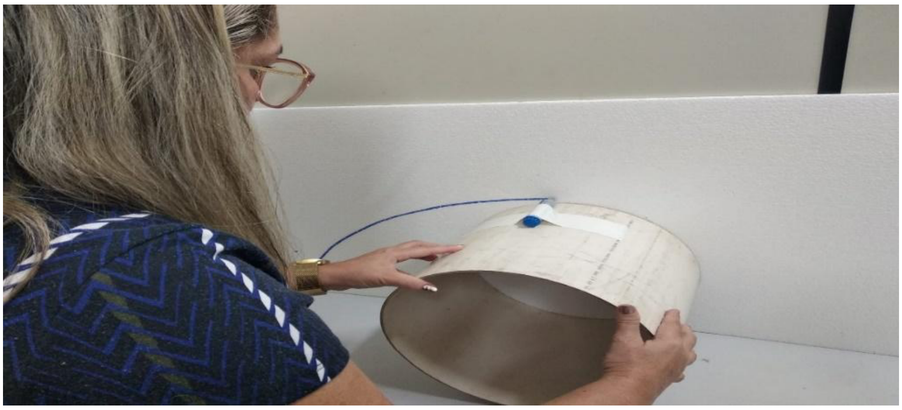
3.2 Construção da Ciclóide

O primeiro passo para construir a Ciclóide é manter bem fixo o isopor em um plano vertical. Neste caso é mais conveniente fixar a placa de isopor em uma parede utilizando fita adesiva para evitar que a placa se desloque como mostrado na figura 6.

Figura 6 – Construção da Ciclóide

Para traçar a Ciclóide no isopor, aproxima-se a roda no plano do isopor. A roda escolhida foi um cano de PVC de 30cm. Coloca-se o pincel para quadro branco por fora do cano e se fixa-o na borda deste com fita durex, em seguida faz-se girar o cano com uma das mãos sem que este deslize e com a outra mão fixamos bem a ponta do pincel no plano do isopor (de espessura 20mm). Neste caso tem-se muito cuidado para que o cano não deslize e naturalmente ele deve ficar sobre um plano horizontal bem nivelado como mostra figura 6.1.

Figura 6.1 – Traço da Ciclóide no isopor



Após o cano completar uma volta, o pincel desenha sobre o isopor uma Ciclóide. O passo seguinte é utilizar um estilete e sobre o traço deixado pelo pincel cortar o isopor cuidadosamente. Assim se constrói Ciclóides idênticas utilizando o traçado da primeira Ciclóide. Basta colocar a Ciclóide já pronta sobre outra placa de isopor e desenhá-la para depois confeccioná-la da mesma forma que a primeira. Dificilmente a esfera percorrerá toda a Ciclóide sem cair, por isso é fundamental construir paredes laterais ou ainda uma cavidade profunda, para evitar que a esfera saia da Ciclóide durante o percurso.

Figura 6.2 –Ciclóide pronta

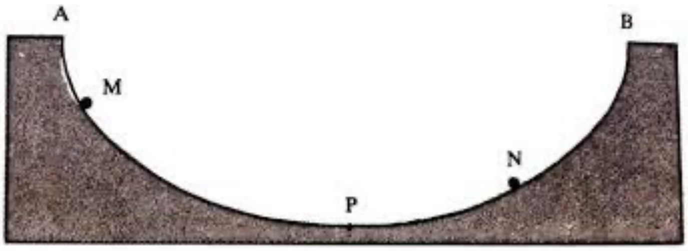
Propriedades da Ciclóide:

Com a Ciclóide pronta verificou-se os problemas da Tautócrona (curva de mesmo tempo) e da Braquistócrona (curva de menor tempo).

3.3 Construção da Tautócrona

O molde da primeira Ciclóide foi transferido para uma placa de isopor de maior espessura, em seguida, foi colado com fita adesiva, tiras de acetato nas laterais do percurso para evitar que as esferas caíssem durante o percurso, as dimensões do modelo são as seguintes, comprimento da base 100 cm altura 50 cm, largura 3 cm. Como a esfera irá percorrer a superfície da Ciclóide é importante reduzir o atrito sobre o percurso. Neste caso utiliza-se uma fita isolante amarela sobre a superfície da curva, em seguida, a Ciclóide foi encapada com papel madeira e feito os pés de sustentação com o próprio isopor.

Figura 6.3 – Tautócrona pronta



Fonte: f.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID766/v15_n3_a2020.pdf

Como já foi discutido, partículas soltas do repouso a partir de alturas diferentes **M** e **N** de uma mesma Ciclóide chegam ao mesmo tempo no ponto mais baixo **P**. Para provar experimentalmente esta propriedade, basta soltar duas esferas de duas posições diferentes e filmar os seus trajetos.

3.3.1 O procedimento experimental da Tautócrona

Para o desenvolvimento desta atividade deve seguir os seguintes passos:

i) Será escolhido dois pontos diferentes de uma mesma Ciclóide e posicionar uma esfera em cada ponto.

ii) Em seguida, soltamos as esferas ao mesmo tempo desses pontos e notamos que elas chegaram ao mesmo tempo na parte mais baixa da Ciclóide independente dos pontos escolhidos.

Figura 6.4 – Tautócrona com as esferas caindo

Os resultados obtidos podem ser verificados no filme que desenvolvemos e acessados:

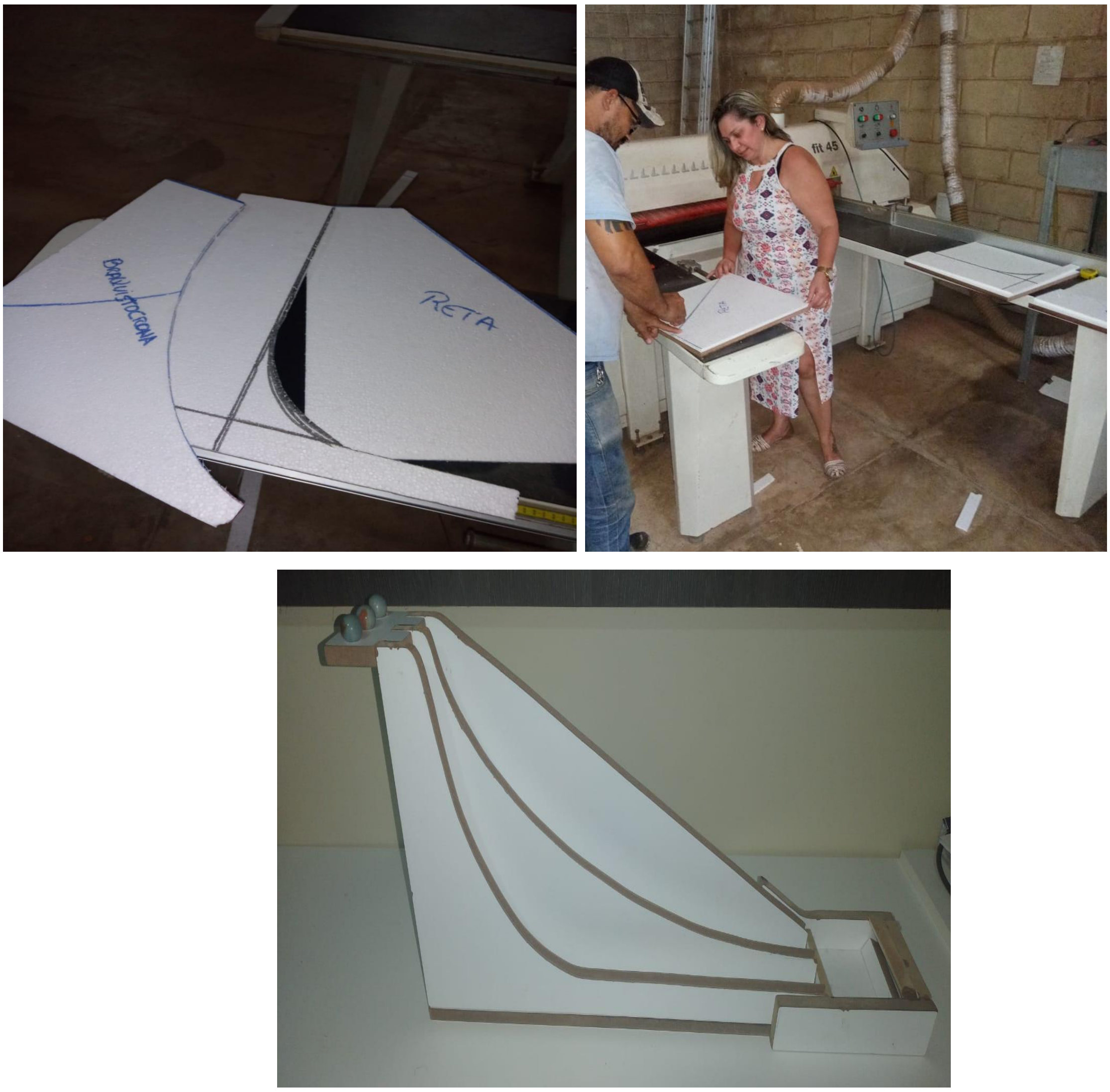
Tautócrona - Google Drive

3.4 Para a construção da Braquistócrona

O modelo que será construído para este experimento é composto por uma reta, uma Braquistócrona (Ciclóide) e uma hipérbole, as dimensões do modelo são as seguintes, comprimento da base 50 cm, altura 36 cm, largura 11 cm e a angulação da reta em relação a base do modelo é de 40 graus.

Com o molde da Ciclóide pronta, delimitamos dois pontos, o eixo central e a altura em relação a base de sustentação dela, formando o plano inclinado (trajetória reta), em outro isopor mantendo a mesma altura traçamos a parábola, com as mesmas medidas, em seguida, foi levado ao marceneiro para cortar com a serra tico-tico os moldes nas placas de MDF de 15 cm. Logo, durante a montagem utilizamos prego, cola e lixa para o acabamento, em seguida foram feitas as colagens das peças como mostra as fotos a seguir.

Figura 6.5 – Construção da Braquistócrona



3.4.1 O procedimento experimental da Braquistócrona

Para o desenvolvimento desta atividade deve seguir os seguintes passos:

Escolher dois pontos da Braquistócrona, reta e hipérbole com alturas diferentes, em seguida descrever como deve proceder para a realização da atividade.

i) Soltar três esferas idênticas - uma percorrendo a Ciclóide, outra uma curva da hipérbole e outra a trajetória do plano inclinado.

ii) Mostrar que entre os dois pontos do trajeto ligados por essas curvas a esfera que gasta o menor tempo é aquela que percorreu a Ciclóide.

iii) Será soltado nessas três curvas também um bloco (dado) para verificar se vai haver alteração no tempo entre as curvas.

Os resultados obtidos podem ser verificados no filme que desenvolvemos e ser acessados: <https://drive.google.com/file/d/1JdRnCd6KteJG7a7nkPaD5fkW5-Ite50b/view?usp=drivesdk>

Figura 6.6 – Braquistócrona partícula lisa (bola de gude)

https://drive.google.com/file/d/10TyXsWC_XCf3Z-eyECqqKEy_2CWVMPZ-/view?usp=sharing

Figura 6.7 Braquistócrona partícula polido (bloco)

No experimento com os móveis lisos (bola de gude) e polido (bloco) ocorre uma diferença que pode ser perceptível pela análise visual ou manual afetando o resultado final, podemos dizer que a estrutura dos materiais utilizados no experimento quanto mais “lisos” ou “polidos” estiverem os objetos em contato, menor será a força de atrito. Essa propriedade é definida numericamente pelo coeficiente de atrito, que pode ser dinâmico ou estático, possuindo um valor diferente para cada material ou sua forma geométrica. Diante disso, a bola de gude realiza rolamento puro por ser uma seção circular e o bloco realiza atrito de escorregamento.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519) reconheceu a diferença entre o atrito de rolamento e o atrito quando existe um deslizamento entre superfícies, assim como os benefícios da utilização de lubrificantes. Ele foi a primeira pessoa a chegar na lei correta de atrito estático. Estudou as forças sobre um bloco retangular para colocá-lo em movimento sobre uma superfície, com o bloco podendo estar apoiado sobre faces diferentes (que possuem áreas diferentes).

> “O atrito produz o dobro da quantidade de esforço se o peso for dobrado,” e “o atrito feito pelo mesmo peso terá resistência igual no início de seu movimento, embora o contato possa ser de larguras e comprimentos diferentes.” (DOW79, pág. 98).

Estas observações estão de acordo com as formulações da lei de atrito estático, a saber:

1. A força de atrito é diretamente proporcional à força normal aplicada sobre o corpo.
2. A força de atrito é independente da área aparente de contato entre o corpo e a superfície sobre a qual está apoiado.

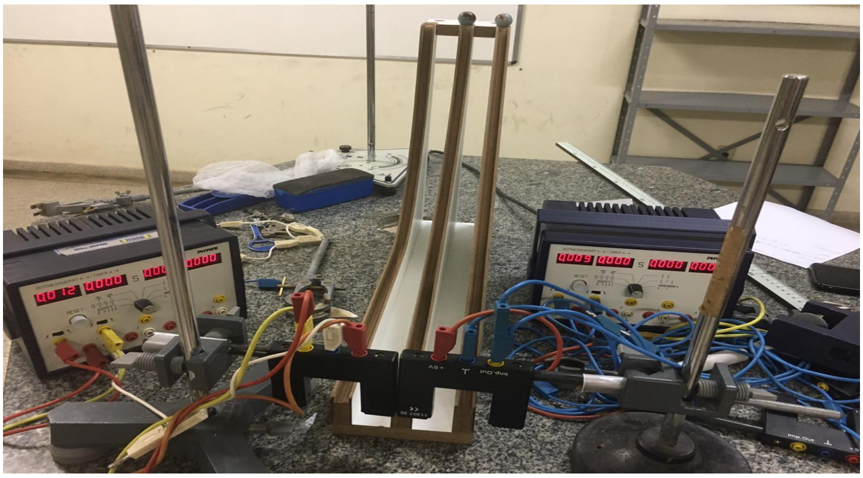
Foi ele também o responsável pela introdução do coeficiente de atrito, definido como a razão da força de atrito com a força normal (embora ele não utilizasse o símbolo μ para esta razão):

$$\mu = \frac{\boldsymbol{Fat}}{\boldsymbol{N}}$$

3.4.2 Tempo de descida do corpo liso

Trazendo para a prática, no laboratório de Física com o auxílio de dois cronômetros digitais (contador de tempo) e dois sensores de tempo, foi feito as medições do tempo em segundos de descida para a braquistócrona, reta e hipérbole.

Figura 7. Braquistócrona ligado no cronômetro



Com altura de 50 cm e 36 cm de comprimento na horizontal para Braquistócrona, reta e hipérbole, como mostra figura 7, foram feitos vários testes, na primeira medição, foram soltas duas bolas de gudes ao mesmo tempo inicial 0 segundos na reta e Braquistócrona nesta, foi observado o menor tempo de queda na Braquistócrona como pode ser verificado no filme que desenvolvemos e ser acessados:<https://drive.google.com/file/d/1TAmAn-ixl9oFAtDHONUNF079NpFLZWGg/view?usp=drivesdk>

Na segunda medição foi levada em consideração a reta e hipérbole com tempo inicial também 0 segundos, nesta foi observado o menor tempo de queda na reta.

Ficando nesta medição em maior tempo final de queda a hipérbole como pode ser verificado no filme que desenvolvemos e acessado:

<https://drive.google.com/file/d/1T5qyJ6rjZlEqZX-8CsuNJOvBIgMFb9AD/view?usp=drivesdk>

Na tabela abaixo fica claro a diferença de tempo de descida obtido durante a execução do experimento no laboratório entre a Braquistócrona, reta e hipérbole comprovando que a Braquistócrona é a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo.

Tabela 7.1. Tempos (em segundos) de descida de uma esfera em diversas curvas.

Forma da rampa	**Tempo de queda**
Braquistócrona	0,006s
Reta	0,09s
Hipérbole	0,012s

4 PROPOSTA PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Vimos que a Ciclóide apresenta várias propriedades interessantes cuja demonstração matemática foge do nível do ensino médio, entretanto podemos explorar suas propriedades independentemente do nível em consideração. Uma proposta seria trabalhar com alunos do 3º ano do ensino médio unindo conceitos de física, matemática e história, com as curvas apresentadas neste trabalho. Na parte histórica se trabalharia na história da física e da astronomia, no aspecto da matemática os assuntos da geometria, trigonometria e funções reais. Já na física da mecânica abordaremos os conceitos de cinemática (velocidade média, aceleração média) e dinâmica (conservação de energia, força de atrito e rolamento), além de outros. Assim, fortalecendo a interdisciplinaridade entre essas ciências que é fundamental na construção do conhecimento do estudante. Antes da execução dos experimentos, em sala de aula, os estudantes serão submetidos ao preenchimento de um questionário diagnóstico, em seguida será feito o desafio. Com base no experimento a seguir," três bolas de gudes, uma desce por um plano inclinado, outra por uma Braquistócrona e o seguinte pela última curva. Supondo que as três tenham o mesmo peso e que sob o efeito da gravidade as três partem simultaneamente do ponto superior A (início) até o ponto inferior B (final). A pergunta é a seguinte: qual delas atingirá o ponto B em primeiro lugar, isto é, qual delas terá o menor tempo?".

Apresentado aos discentes as experiências da Tautócrona e da Braquistócrona de investigação feita para servir de guia para tabulação de dados deste trabalho. Com base no exemplo a seguir, três skatistas descendo por curvas radicais, um desce por um plano inclinado, outro por uma Ciclóide e o seguinte pela última (hipérbole). Supondo que os três skatistas tenham o mesmo peso e que sob o efeito da gravidade os três partem simultaneamente do ponto superior A até o ponto inferior B. A pergunta é a seguinte: qual deles atingirá o ponto B em primeiro lugar, isto é, qual deles será o mais rápido, quem percorre o plano inclinado ou quem percorre a curva?"

Em seguida será feita a demonstração prática envolvendo os três eixos parametrizados. Na demonstração será levado em consideração durante a descida o menor tempo e não a menor distância e ainda terá dois momentos, um com corpo em movimento circular e outro com corpo em deslizamento para verificar se haverá alteração no tempo, podendo até variar a altura simultaneamente, oportunizando o entendimento, dos corpos que desce pela curva terá maior aceleração, devido à maior inclinação em relação ao que desce pela reta.

A Ciclóide é a curva traçada por um ponto qualquer da borda de uma circunferência que rola sem deslizar por um plano horizontal que consiste em determinar o tempo de queda mínimo de um móvel que desliza somente sob a ação da gravidade. A ideia era mostrar que, intuitivamente, seríamos levados ao erro deduzindo que o percurso mais rápido seria uma reta, por ser a menor distância entre dois pontos.

Depois das apresentações será aplicado uma avaliação formativa para medir o nível de aprendizagem dos estudantes ao desenvolvimento dos experimentos. A aplicação dessas práticas, não possui como objetivo substituir as aulas convencionais, e sim, propor uma metodologia alternativa, podendo ser apresentados de maneira simplificada e lúdica no Ensino Médio, claro, trazendo este estudo para a realidade do aluno.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De fato, essa curva chama atenção pela beleza que revela em suas propriedades Braquistócrona e Tautócrona, permite que temas relacionados à Física, astronomia e Matemática sejam trabalhados por meio dela. De início este trabalho seria aplicado em sala de aula, inclusive com a sondagem do questionário em anexo, porém, por causa do Coronavírus ficou sugerido como proposta metodológica ser aplicado em vídeo aula pelo docente .

Este trabalho descreve o conteúdo e mostra como realizar atividades integradoras que venham a melhorar o ensino de outras ciências e permite desenvolver outras habilidades (além do raciocínio matemático) no aluno. Introduzir o conteúdo de forma que a curiosidade do aluno seja instigada já é um grande passo no ensino dessa disciplina. Foi esse objetivo deste trabalho, despertar a curiosidade dos envolvidos através das práticas experimentais sem tão pouco deixar de lado a parte teórica. Naturalmente o objetivo aqui colocado só é atingido com um professor muito motivado e habilidoso porque para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é necessário conhecer a disciplina, ter interesse e entusiasmo por ela. Concluo essa dissertação com a satisfação de ter conhecido seu contexto histórico ligado à proposição do problema da Braquistócrona e da Tautócrona, que por sinal é uma curva fantástica podendo ser usada em pista de skates, na arquitetura, nas hidrelétricas e etc. Confesso que quando recebi esse desafio achei que a construção do protótipo seria um bicho de sete cabeças, mais ao me aprofundar nas pesquisas, percebi que tem várias formas de construção, porém trazer isso para o ensino médio seria desafiador e isso aguçou a minha curiosidade, escolher métodos que facilite o ensino com materiais concretos são recursos didáticos que interferem fortemente no aprendizado.

REFERÊNCIAS

BARON, Margareth E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Matemática grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide**: Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: Scor Tecci, 2011. 252 p.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLORES, Ana Paula Ximenes. **Cálculo Variacional**: aspectos teóricos e aplicações. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Rio Claro, 2011

BRAGGS, Steven. **Spirograph**. Disponível em: <http://www.retrowow.co.uk/ retro_collectibles/60s/spirograph.php>. Acesso em: 06 abr. 2013.

SOUSA, José Ribamar Alves Júnior. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona.** Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010. 4

GALILEI, Galileu. **Diálogos sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano.** São Paulo: Discurso Editorial, 2001

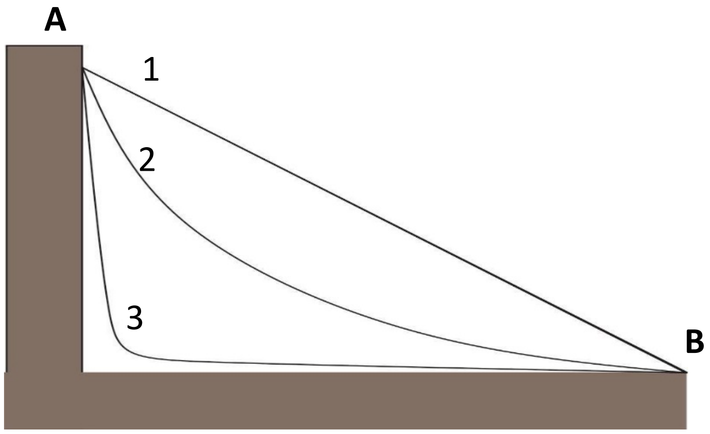
DOW 79 – D. Dowson; **History of Tribology**, London: Longman, 1979.

ANEXO A - QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

1. Você conhece a curva Braquistócrona?

Sim (   )   Não (   )

2. De acordo com a figura abaixo



Marque o que você consegue identificar

(   ) Reta   (   ) Braquistócrona   (   ) Hipérbole

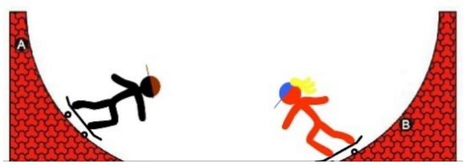
3. Ainda de acordo com a figura acima, ao soltarmos 3 bolas de gude ao mesmo tempo do ponto A. Qual chega primeiro ao ponto B.

(   ) 1   (   ) 2   (   ) 3

4. Você já ouviu falar na curva Cicloide ou Tautócrona

Sim (   )   (   ) Não

5. De acordo com a figura baixo você identificar esta curva.



(   ) Sim   (   ) Não

6. Você já viu em seu cotidiano essa aplicação.

(   ) Sim   (   ) Não

ANEXO B-QUESTIONÁRIO PÓS-EXPERIMENTO

1. O que se denomina Braquistócrona?

a) ( ) A trajetória mais rápida terá velocidade final maior e a trajetória mais lenta terá velocidade final menor

b) ( ) Os corpos chegam todos juntos, pois a gravidade é uma força conservativa e todas as velocidades finais são iguais

c) ( ) A trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca ente dois pontos no menor intervalo de tempo.

d) ( ) será aquela realizada em menor tempo, entretanto a velocidade final do corpo é a maior que as demais.

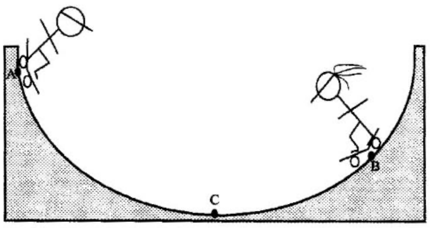
2. O que se denomina Tautócrona?

a) É a curva traçada por um ponto do bordo de uma circunferência rolando sobre uma superfície reta.

b) É a curva em um plano vertical as quais um corpo livre e sem atrito corre através dele para um ponto mais baixo sempre leva ao mesmo tempo, a partir de qualquer ponto da curva que tenha deixado.

c) É a curva traçada por um ponto do bordo de uma circunferência rolando sobre diferentes superfícies.

d) É a curva em um plano vertical as quais um corpo livre e sem atrito corre através dele para um ponto mais baixo sempre leva a maior velocidade.



3. Qual dos Skatistas chegará primeiro ao ponto C?

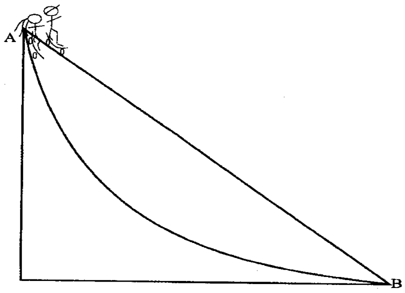
a) O skatista A

b) O skatista B

c) Os dois skatista juntos

d) Nenhum dos dois

4. Dois Skatistas deslizam por rampas diferentes, uma reta e a outra curva. Qual chegará primeiro?



a) A reta

b) A curva

c) Os dois juntos

d) Nenhum dos dois