Universidade Federal do Amapá
Programa de Mestrado
Profissional em Matemática- PROFMAT
Dissertação em mestrado

Josielson Rodrigues da Silva

Investigações Matemáticas e o ensino da Geometria: Uma proposta de Intervenção em sala de aula com o uso do Geogebra

Macapá - AP

2022

Josielson Rodrigues da Silva

Investigações Matemáticas e o ensino da Geometria: Uma proposta de Intervenção em sala de aula com o uso do Geogebra

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá- PROFMAT, como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática sob a orientação do Prof. Ms Márcio Baia

Universidade Federal do Amapá

Pró retoria de pesquisa e pós graduação

Mestrado profissional em matemática

Orientador: Prof. Ms. Márcio Baia

Macapá - AP

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Mário das Graças Carvalho Lima Júnior – CRB-2 / 1451

S586 Silva, Josielson Rodrigues da.
Investigações matemáticas e o ensino da geometria : uma proposta de intervenção em sala de aula com o uso do GeoGebra / Josielson Rodrigues da Silva. - 2022.
1 recurso eletrônico. 63 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Macapá, 2022.
Orientador: Márcio Baia.

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Investigação matemática. 2. Geometria. 3. GeoGebra. I. Baia, Márcio, orientador. II. Universidade Federal do Amapá . III. Título.

CDD 23. ed. – 510

SILVA, Josielson Rodrigues da. **Investigações matemáticas e o ensino da geometria** : uma proposta de intervenção em sala de aula com o uso do GeoGebra. Orientador: Márcio Baia. 2022. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JOSIELSON RODRIGUES DA SILVA**, intitulada: **Investigações matemática e o ensino de geometria: Uma proposta de intervenção em sala de aula com o uso do Geogebra**, após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 02 de dezembro de 2023.

MBahia

Prof. Me. Marcio Aldo lobato Bahia
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Almeida Leal

Prof. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal
Avaliadora interna (PROFMAT/UNIFAP)

Edcarlos V. da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Vasconcelos da Silva
Avaliador externo

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por todos os acontecimentos que me trouxeram até aqui.

A minha esposa e filhos, por me fortalecerem e inspirarem nos momentos difíceis durante a caminhada; aos meus pais, amigos e familiares, pelo incentivo e apoio;

Aos colegas de turma e também da turma PROFMAT 2019, pelos conhecimentos compartilhados e incentivos no decorrer do curso de mestrado profissional.

A todos os professores da Universidade Federal do Amapá, que ministraram o curso de mestrado profissional de matemática.

Ao Prof. Ms. Márcio Baia, pela contribuição e orientação nas horas necessárias;

Ao PROFMAT pela oportunidade de melhorar como profissional de sala de aula, me proporcionando a aquisição de novos conhecimentos, assim como uma nova visão de aplicação do conhecimento matemático em práticas no cotidiano de nosso alunado.

"Dedico este trabalho a memória de meu irmão Paulo Messias que participou ativamente do início de minha caminhada, e as pessoas que me incentivaram na vida e acreditaram em mim: meu pai Josias Rodrigues, minha esposa Elciene Coelho, minha filha Jamylle Eloah,meu tio Sebastião Rodrigues e Mãe Maria Raimunda Monteiro, por todo apoio e compreensão. "

Resumo

O presente trabalho busca apresentar uma proposta de aplicação da Investigação Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, tendo o Software GeoGebra como instrumento auxiliar nesta caminhada. Para tanto, apresenta-se uma revisão de literatura para revisitar historicamente a evolução da geometria, as implicações do ensino tradicional da matemática, além de um exame sobre as diferentes tendências da educação matemática, focando na Investigação Matemática e na aplicabilidade do Software GeoGebra no processo de construção significativa de conceitos geométricos. A investigação matemática, nos molde como é defendida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), propicia ao educando a possibilidade de interagir sobre o objeto matemático, criando hipóteses e testando conjecturas e, dessa forma, construindo seus próprios conceitos de forma prazerosa e ativa. Por fim, sugere-se, como forma de contribuição, duas atividades investigativas, com o uso do GeoGebra, explorando conceitos de áreas de triângulo e condição de existência (desigualdade triangular).

Palavras-chave: Investigação Matemática. Geometria. Geogebra.

Summary

The present work seeks to present a proposal for the application of Mathematical Investigation in the teaching and learning process of Geometry, using the GeoGebra Software as an auxiliary tool in this journey. To this end, a literature review is presented to historically revisit the evolution of geometry, the implications of traditional mathematics teaching, as well as an examination of the different trends in mathematics education, focusing on Mathematical Research and the applicability of GeoGebra Software in the process. of meaningful construction of geometric concepts. Mathematical research, as advocated by Ponte, Brocardo and Oliveira (2013), provides students with the possibility of interacting with the mathematical object, creating hypotheses and testing conjectures and, in this way, building their own concepts in a pleasant and active way. . Finally, it is suggested, as a form of contribution, two investigative activities, using GeoGebra, exploring concepts of triangle areas and condition of existence (triangular inequality).

Keywords: Mathematical Research. Geometry. GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A história da Matemática nos mostra que a geometria tem sua origem em tempos muitos remotos. Conceitos geométricos certamente se desenvolveram bem antes dos conceitos numéricos. Segundo Eves (1992), devemos considerar na análise da construção histórica da geometria, duas geometrias distintas: A geometria subconsciente e a geometria científica. A primeira fundamentada na ação instintiva e intuitiva humana, quando, por exemplo, tem que estabelecer a menor distância num trajeto ou avaliar o formato adequado de um terreno. Por sua vez, a geometria científica tem início quando o ser humano começa a perceber as propriedades dos entes geométricos e assim, passa a estabelecer regras gerais para a resolução de problemas concretos.

O homem primitivo, em sua relação de sobrevivência e adaptação a natureza, certamente desenvolveu de forma subconsciente diversos conceitos matemáticos, sendo os conceitos geométricos aqueles mais necessários e utilizados, uma vez que as atividades práticas manuais exerciam papel predominante em seu cotidiano e essenciais à sua sobrevivência. A ideia de distância, a observação das formas planas e relações espaciais, paralelismo e verticalidade, foram alguns dos conceitos geométricos desenvolvidos pelo homem primitivo de forma empírica. Pelo exposto, percebe – se que o conhecimento geométrico faz parte da realidade humana, pois mesmo que de forma inconsciente a geometria está inserida no cotidiano. No entanto, quando se trata do ensino de geometria na escola, a realidade da sala de aula torna a geometria um conhecimento distante, desconexo da vivência do aluno.

O ensino da matemática no Brasil, durante muito tempo sofreu forte influencias de correntes ligadas ao Movimento da Matemática Moderna. Tal movimento tem a origem devido a guerra fria entre EUA e a extinta União Soviética. O avanço tecnológico soviético e a corrida espacial, levaram os americanos a uma reformulação visando o avanço e modernização dos programas e métodos de ensino de matemática, conforme nos auxilia Miorim (1998):

> Durante os primeiros anos da década de 50, vários projetos começaram a ser desenvolvidos, tendo em vista a melhoria do ensino secundário, especialmente por meio da adequação à realidade da universidade e aos avanços tecnológicos. Mas foi um fato não ligado diretamente à situação escolar dos Estados Unidos que acabou acelerando as propostas pedagógicas americanas e desencadeando um movimento internacional de modernização. O lançamento, em 1957, do primeiro foguete3 soviético – o Sputnik – levou o governo americano a tomar consciência de que, para resolver o problema da clara desvantagem tecnológica existente em relação aos russos, era necessário repensar o ensino de matemática e o de ciências (p. 108).

Assim, o Movimento da Matemática Moderna – MMM, buscou implementar uma renovação curricular, pautada num ensino voltado para aproximação dos conteúdos dos cursos secundários com àqueles desenvolvidos à nível superior, dando ênfase as formalizações e se distanciando da matemática experimental, fundamentando-se na teoria dos conjuntos e estruturas algébricas, conforme nos informa o documento oficial PCN – Parâmetros Curriculares Nacional, de 1998:

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática. [...] O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas. (PCN, 1998, p.19 – 20)

Neste sentido, se faz necessário uma mudança na forma de abordar o ensino de geometria, buscando metodologias que visem ressignificar o ensino deste conteúdo na escola. A investigação matemática aliada ao uso de tecnologias midiáticas, neste caso o Geogebra, mostra-se como uma possibilidade para renovação e construção do conhecimento significativo pelo educando.

Investigar em sala de aula propicia ao educando a possibilidade do fazer matemático, não no sentido do trabalho do pesquisador matemático, mas no caminho da descoberta das relações, propriedades, dos significados dos entes matemáticos. Tal metodologia, em virtude do Novo Ensino Médio - NEM e da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, que preconizam um ensino de Matemática, por conseguinte, de geometria, centrado no aluno, pautado na construção de habilidades e competências, mostra - se um caminho seguro.

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2017, p.529).

Segundo David e Tomaz (2013, p.21) o desenvolvimento de atividades investigativas em sala de aula favorecem as interações entre os alunos, uma vez que leva os mesmos a inquerirem, fazerem conjecturas, testarem e formularem hipóteses em busca de respostas possíveis a situação investigada. Assim, aliar a investigação matemática e a tecnologia em aulas de matemática, especificamente no ensino de geometria, é a proposta da presente pesquisa, cujo tema é: Investigações Matemáticas e o Ensino da Geometria: Uma Proposta de Intervenção em Sala de Aula com o uso do Geogebra.

2 Um pouco de história: A geometria no decorrer do tempo

2.1 Das cavernas a Euclides

A história da Matemática nos mostra que a geometria tem sua origem em tempos muitos remotos. Conceitos geométricos certamente se desenvolveram bem antes dos conceitos numéricos. Segundo Eves (1992), devemos considerar na análise da construção histórica da geometria, duas geometrias distintas: A geometria subconsciente e a geometria científica. A primeira fundamentada na ação instintiva e intuitiva humana, quando, por exemplo, tem que estabelecer a menor distância num trajeto ou avaliar o formato adequado de um terreno. Por sua vez, a geometria científica tem início quando o ser humano começa a perceber as propriedades dos entes geométricos e assim, passa a estabelecer regras gerais para a resolução de problemas concretos.

O homem primitivo, em sua relação de sobrevivência e adaptação a natureza, certamente desenvolveu de forma subconsciente diversos conceitos matemáticos, sendo os conceitos geométricos aqueles mais necessários e utilizados, uma vez que as atividades práticas manuais exerciam papel predominante em seu cotidiano e essenciais à sua sobrevivência. A ideia de distância, a observação das formas planas e relações espaciais, paralelismo e verticalidade, foram alguns dos conceitos geométricos desenvolvidos pelo homem primitivo de forma empírica. Neste sentido, Barasuol (2006) nos informa que:

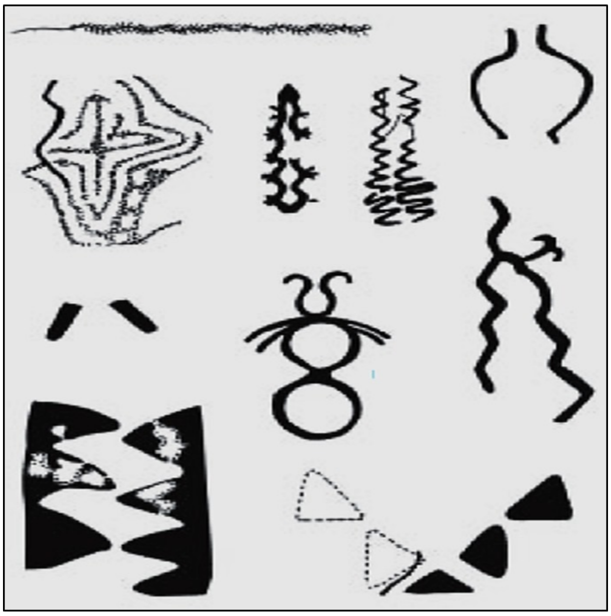
> O homem do Neolítico revelou um agudo sentido para os padrões geométricos. A cozedura e a pintura em cerâmica, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e têxteis e o fabrico de metais conduziram à noção de plano e relações espaciais (BARASUOL, 2006, p.2-3).

Neste caminho evolutivo, o homem primitivo, ao buscar mecanismos que lhe garantam agir sobre a natureza, foi construindo diversos saberes que se incorporaram ao seu modo de vida. D'Ambrósio (2015), afirma que a necessidade de alimentação leva o homem a construir os primeiros utensílios de caça utilizando lascas de pedras.

> Assim tem-se evidencia de instrumentos de pedra lascada que, há cerda de 2 milhões de anos, foram utilizados para desencarnar, melhorando assim a qualidade e quantidade de alimentos disponíveis. É claro que a pedra, lascada com esse objetivo, deveria ter dimensões adequadas para cumprir sua finalidade. A avaliação das dimensões apropriadas para a pedra lascada talvez seja a primeira manifestação matemática da espécie. (D'Ambrósio, 2015, p.19)

Boyer(2003), destaca também que a ideia de congruência e simetria já eram desenvolvidas pelo homem primitivo. As pinturas rupestres em cavernas, a arte na cerâmica, os padrões na tecelagem, confirmam essa teoria. Abaixo temos uma imagem onde a arqueóloga Paola González, membro da Sociedade Chilena de Arqueologia, mostra em seu artigo publicado no Boletim do Museu Chileno de Arte Pré-colombiana, a presença de traçados simétricos neste período histórico.

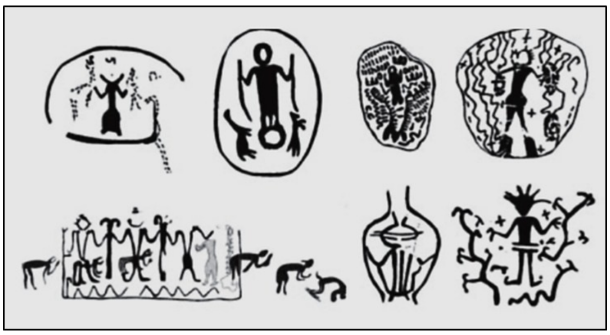
Figura 2.1 – Simetria na Arte Pré-colombiana: Simetria Horizontal e vertical



Fonte: González C., Paola (2005, p.63). Adaptado pelo Autor

A figura 2.1 mostra o uso de simetrias horizontais e verticais, em torno de um eixo de simetria imaginário, enquanto que na figura seguinte temos o uso da figura humana como eixo de simetria. Ambas imagens mostram que os povos pré-colombianos apresentavam um certo domínio sobre o conceito de simetrias e padrões, ou seja, já apresentavam de certa forma, uma geometria intuitiva ou subconsciente.

Figura 2.2 – Simetria na Arte Pré-colombiana: Desenhos complexos tendo figuras humanas como eixo de simetria



Fonte: González C., Paola (2005, p.63). Adaptado pelo Autor.

A geometria científica surge quando a observação de formas, tamanhos, padrões e relações espaciais, faz com que o ser humano adote uma certa seleção de "técnicas" de resolução de problemas práticos à partir de propriedades comuns de entes geométricos similares. Assim, podemos afirmar que a geometria científica se inicia fundamentada principalmente em uma geometria experimental. No Egito Antigo, segundo os registros do historiador Heródoto (sec. V a.c), a agrimensura às margens do Rio Nilo, dá origem a geometria científica. Segundo este historiador, a necessidade de remarcação dos limites das terras cedidas a agricultura, devido as inundações as margens do Rio Nilo, faz com que surja a função dos "esticadores de cordas", cujo papel era quantificar, a partir de medidas de cumprimento e largura, o quanto as águas do Rio Nilo adentraram nas terras cultiváveis, gerando assim um tributo justo e proporcional às terras cultiváveis:

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesótris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. (HERÓDOTO, século V a.C apud, EVES 1997, p.3).

A geometria, assim como toda a matemática egípcia, fundamentou-se em atividades empíricas, não havendo uma preocupação da formalização e demonstração dos conceitos envolvidos na resolução de certo problema: o método de resolução se sobrepõe ao conceito matemático envolvido. Os egípcios assim, desenvolveram uma geometria prática, onde os "receituários" para a busca de soluções de problemas semelhantes é o que prevalece. Podemos citar como exemplo, o cálculo do volume de um cilindro reto, onde os egípcios utilizavam uma aproximação para área do círculo através da área do quadrado com medida do lado igual a 8/9 do diâmetro do círculo e multiplicavam este resultado pela altura do cilindro.

Segundo Eves (1992, p.06) apesar de não haver registros que os egípcios conheciam o teorema de Pitágoras, os mesmos dominavam o uso de triângulos retângulos para construção de ângulos retos, utilizando para tal triângulos de lados 3, 4 e 5 e uma corda de comprimento 12, dividida igualmente por 11 nós, que quando dispostos em forma triangular de lados 3, 4 e 5, garantiam a construção do ângulo reto e, assim, de um triângulo retângulo pitagórico. Dentre os diversos papiros que nos trouxeram informações sobre a matemática egípcia, destacamos dois: O papiro de Rhind e o papiro de Moscou. O papiro de Rhind, datado de 1650 A.c, apresenta 85 problemas matemáticos, desde de problemas aritméticos simples à problemas geométricos, de cálculo de áreas e volumes.

Figura 2.3 – Papiro de Rhind

Fonte:Mol (2013, p.22)

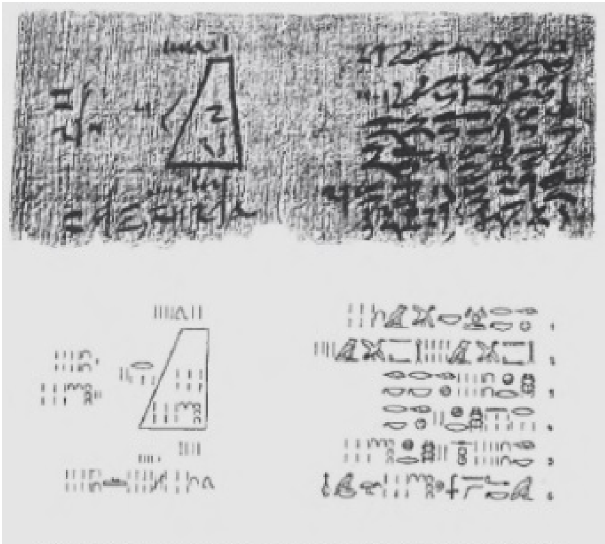
A figura 2.4 ilustra mostra uma parte do papiro de Rhind, onde é descrita a comparação entre a área do círculo e a área do quadrado circunscrito, método já comentado anteriormente:

Figura 2.4 – Papiro de Rhind: Comparação entre a área do círculo e do quadrado circunscrito.

Fonte:Mol (2013, p.22)

Por sua vez, o papiro de Moscou, datado de aproximadamente 1859 a.C, apresenta 25 problemas, mas devido a deterioração da peça, muitos não puderam ser interpretados em sua totalidade. Seus problemas são basicamente de áreas e volumes, destacando-se pirâmides e troncos de pirâmides.

Figura 2.5 – Papiro de Moscou

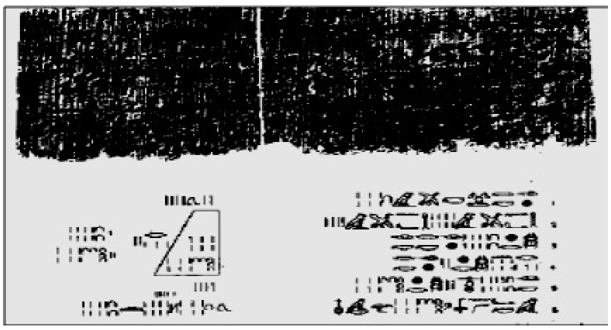


Problema 14 do *papiro Moscou*, com a transcrição hieroglífica do texto hierático

Fonte:Eves (2013, p.86)

Na figura 2.6 temos uma ilustração de um dos problemas geométricos descritos no papiro de Moscou (14º problema), onde é calculado volume de um tronco de pirâmide:

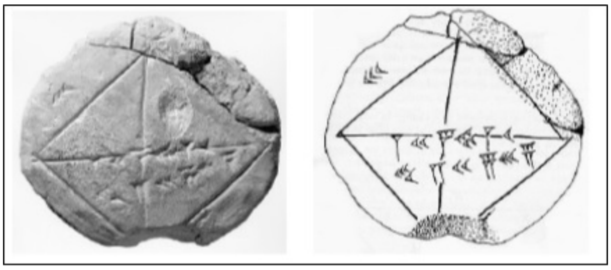
Figura 2.6 – 14º Problema do Papiro de Moscou: Cálculo do volume de um tronco de Pirâmide



Fonte: Boyer (2005, p. 07)

Outro povo que também contribui na evolução da matemática e, consequentemente, da geometria, foram os babilônios. Denomina-se babilônios à todos os povos que viviam na região denominada Mesopotâmia (entre os rios Tigres e Eufrates). Os registros da matemática babilônica foram feitos em tábulas de argilas, através de escrita cuneiforme. Além do sistema de numeração sexagesimal (base 60), os babilônios dominavam um algoritmo para o cálculo da raiz quadrada aproximada de um número natural, envolvendo o conhecimento da área do quadrado, bem como dominavam a resolução de problemas que envolviam grandezas em segundo grau. A figura seguinte mostra uma aproximação obtida para a raiz quadrada de 2 pelo método babilônico:

Figura 2.7 – Tábula YBC 7289: Cálculo aproximado da raiz quadrada de 2.



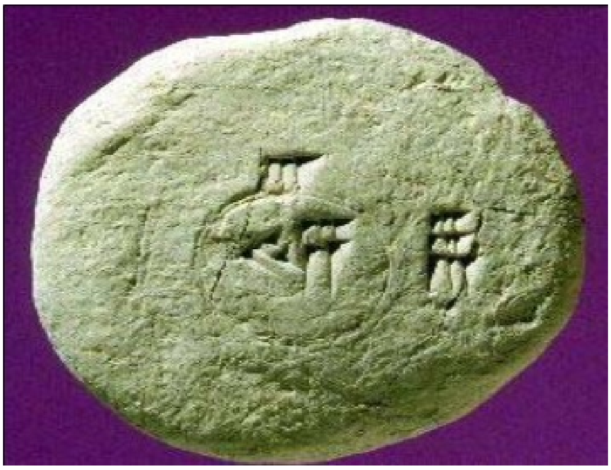
Fonte: Roque et Al. (2012, p. 16)

Segundo Roque et Al (2012) alguns historiadores matemáticos conjecturaram que a matemática babilônica fundamentava-se em "uma natureza primordialmente algébrica". No entanto, através da reinterpretação de documentos e de novas pesquisas, mostra-se uma fundamentação geométrica à matemática daquele povo.

> Este paralelo, no entanto, decorre das traduções tendenciosas propostas pelos historiadores mais antigos, que pressupunham, implicitamente, a natureza algébrica da Matemática babilônia. Temos hoje disponíveis trabalhos históricos, como os de J. Høyrup, mostrando que estas traduções não eram fiéis ao estilo da Matemática praticada na época. A partir daí, novas traduções foram propostas, que podem nos levar a conclusões bastante distintas sobre a natureza da Matemática nesta cultura. (Roque et Al. 2012, p. 20).

A geometria dos babilônios, assim como a geometria dos egípcios, consistia em uma geometria métrica, empírica, voltada quase sempre para o cálculo de áreas e volumes através de procedimentos padronizados. Por exemplo, para o cálculo da área de um círculo, utilizavam o quadrado do comprimento da circunferência, dividido por 12. Na figura 2.8, temos o tablete YBC 7302, que mostra um círculo e sua área calculada.

Figura 2.8 – Tábula YBC 7302: Cálculo aproximado da raiz quadrada de 2.



Fonte: Fonte: Roque et Al. (2012, p. 38)

Como vimos até então, a Geometria no Egito e na Mesopotâmia era basicamente fundamentada em regras e procedimentos, sem a preocupação de justificativas e demonstrações. É com a matemática grega que a Geometria se torna uma ciência dedutiva. Segundo Eves (1992, p.05), a queda da hegemonia política e econômica do povos babilônios e egípcios, faz com que outros povos, destacadamente os gregos, assumam o protagonismo na produção cientifica, em especial da matemática à época. Assim, a geometria demonstrativa surge, de acordo com Eves (op. cit, p.07), com os estudos de Tales de Mileto (624 – 548 a.C), o qual absorveu muito dos conhecimentos matemáticos dos povos babilônicos, dentre os quais aquele conhecido como teorema de Tales: Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto. Segundo Boyer (1974, p.34) quatro outros teoremas e suas demonstrações são atribuídas a Tales:

- Um círculo é bissectado por um diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam, são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e uma lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e uma lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Outro matemático, filosofo e astrônomo que tem importante papel na construção do conhecimento geométrico grego é Pitágoras de Samos (527 - ? a.C). Em sua escola pitagórica, segundo Boyer (op. cit. p. 37) a matemática é estudada de forma abstrata, relacionando os conceitos de forma imaterial e intelectual. A ele é atribuída a demonstração do famoso teorema que relaciona as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triangulo retângulo qualquer, já conhecido pelos povos babilônicos de forma empírica.

Além de Tales e Pitágoras, Platão (427 – 347 a.C.) representa outra importante figura no estudo da matemática e filosofia gregas. O filósofo e matemático Platão atribuiu ao estudo da matemática o mais refinado treinamento para o espírito, tanto que em sua academia em Atenas, segundo estudiosos de sua obra, ficava exposto em sua entrada o seguinte lema: “Que aqui não adentrem aqueles que não forem versados em geometria”. Platão apresentou uma descrição de como construir os cinco poliedros regulares tendo como faces triângulos, quadrados e pentágonos, são os famosos “poliedros de Platão”, a saber: Tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, inclusive o período em que viveu é incerto, tendo algumas sugestões de que o mesmo viveu entre 325 AC – 265 AC, possivelmente tendo sido um dos discípulo de Platão. A Geometria grega tem em Euclides seu maior expoente, uma vez que este sintetiza em sua principal obra, Os Elementos, todo o conhecimento geométrico, algébrico e aritmético da época, apresentando a geometria não como um conjunto de saberes desconexos, mas como um sistema lógico axiomático. Euclides, Segundo Carl Boyer (1998, p.76), pode ter desenvolvido atividades de professor na escola de Alexandria, fato que contribuíra para a forma como apresentou e desenvolveu os conceitos em Os Elementos:

> A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela sua capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era reconhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra − Os Elementos. (Boyer ,1998, p.76).

A obra Os Elementos é composta de 13 livros, sendo que destes 6 são de conteúdo específicos de geometria plana elementar, 3 de geometria sólida (no espaço), 3 sobre teoria dos números e um sobre incomensuráveis. No livro I, Euclides apresenta a base de sustentação do que irá desenvolver nos demais livros. Nele são expostos 48 proposições, fundamentadas em 23 definições, 5 postulados e 5 axiomas, que irão estruturar toda a Geometria Euclidiana Plana. De acordo com Rógerio Mol (2013), Euclides adota em seu trabalho a ideia do filósofo grego Aristóteles para fundamentar sua geometria como um sistema axiomático-dedutivo, uma vez que...

> Segundo Aristóteles, os axiomas eram "indispensáveis de conhecer para aprender qualquer coisa", eram verdades comuns a todos os estudos e tinham validade geral. Os postulados seriam menos óbvios, não pressupondo conhecimento prévio, uma vez que se aplicavam apenas ao objeto em estudo — a geometria, no caso. Essa ideia aristotélica é usada por Euclides ao separar seus postulados dos axiomas. A matemática moderna, no entanto, não faz distinção entre os dois conceitos (Mol, 2013, pg.48).

A seguir, apresentamos os 5 postulados e o 5 axiomas (noções comuns) que sustentam a geometria de Euclides:

Postulados:

1. Desenhar uma linha reta de um ponto a outro ponto.
2. Produzir uma linha reta finita continuamente em outra linha reta.
3. Escrever um círculo dado qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta caindo em duas linhas retas faz a soma dos ângulos interiores do mesmo lado ser inferior a dois ângulos retos as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, se encontram naquele lado onde os ângulos são inferiores a dois ângulos retos.

Axiomas (noções comuns):

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

2.2 Geometria na atualidade: geometrias não euclidianas

O quinto postulado é conhecido como "postulado das paralelas", tendo a demonstração deste se apresentado como um desafio para os matemáticos no decorrer da história. Sua tentativa de demonstração deu origem as geometrias não euclidianas. Diversos matemáticos se debruçaram sobre a análise do quinto postulado de Euclides, tentado demonstrá-lo a partir dos 4 postulados anteriores, no intuito de mostrar o mesmo ser um Teorema. Dentre estes estudiosos, destacamos, Gauss, Bolyai, Lobachevsky (Geometria Hiperbólica) e Riemann (Geometria Elíptica). Vale frisar que esses estudiosos fundamentaram seus estudos a partir da refutação do quinto postulado de Euclides, não objetivando, a princípio, estabelecer uma nova geometria. O que surgiu a parti daí, foram evidências de que existia algo além da geometria euclidiana plana, uma geometria onde o quinto postulado era inviável.

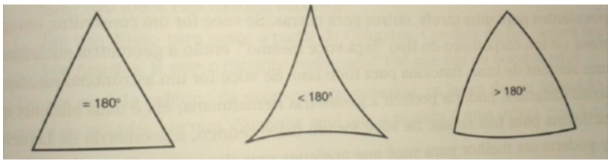
Nos anos de 1820, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss, inicia seus estudos em torno de uma geometria não euclidiana ao perceber, através de estudos posteriores, que era possível estabelecer uma geometria diferente daquela proposta por Euclides (Boyer, 1974, p.396), no entanto, Gauss não publicou nada em torno da produção de sua pesquisa, ficando para Bolyai e, principalmente, Lobachevsky a formalização e publicação do trabalho pesquisado.

As diversas pesquisas produzidas à época, inicialmente, levaram a duas descobertas que fundamentaram a construção de toda uma estrutura de novas geometrias, contrapondo o quinto postulado Euclides:

- Através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a um outro ponto diferente – Geometria elíptica.
- Através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta – Geometria hiperbólica.

Partindo destes princípios, as pesquisas avançam sobre as possibilidades e características dos triângulos, de acordo com a curvatura de cada espaço, ideia essa fundamental para as geometrias não euclidianas.

Figura 2.9 – Um triângulo nas geometrias euclidiana, elíptica e hiperbólica



Fonte:Berlinghoff Gouvea (2010, p. 201)

Na tabela 2.1 temos um quadro comparativo das geometrias não – euclidianas e a geometria euclidiana:

Tabela 2.1 – Quadro comparativo das geometrias não euclidianas e a geometria euclidiana

	CURVATURA	**CARACTERÍSTICA**
Espaço euclidiano	Zero	- Através de um ponto dado podemos traçar somente uma paralela. a uma linha reta; - A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^0 ;circunferência de um círculo é igual a π vezes o seu diâmetro..
Espaço elíptica	Positiva	- Através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a um ponto dado.; - A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180^0 ; .- A circunferência de um círculo é menor que π vezes o seu diâmetro.
Espaço hiperbólico	Negativa	- Através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta; - A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180 ; - A circunferência de um círculo é maior que π vezes o seu diâmetro.

Fonte: autor (2022)

Resumidamente, podemos dizer que o trabalho de Gauss, Bolyai e Lobachevsky deram origem a geometria não euclidiana denominada geometria hiperbólica, caracterizando – se pelos espaços de curvaturas negativas, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180º. Na outra ponta, temos a geometria Riemanniana ou geometria elípitica, caracterizada pelos espaços de curvaturas positiva, onde a soma dos ângulos internos de um triangulo é sempre maior que 180º. O espaço euclidiano, tem curvatura zero (plano) e a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180º, conforme Perez (2015, p.60-61).

3 O ensino tradicional da matemática: implicações no ensino da geometria

3.1 Matemática tradicional e o movimento da matemática moderna

O ensino da matemática no Brasil, durante muito tempo sofreu forte influencias de correntes ligadas ao Movimento da Matemática Moderna. Tal movimento tem a origem devido a guerra fria entre EUA e a extinta União Soviética. O avanço tecnológico soviético e a corrida espacial, levaram os americanos a uma reformulação visando o avanço e modernização dos programas e métodos de ensino de matemática, conforme nos auxilia Miorim:

> Durante os primeiros anos da década de 50, vários projetos começaram a ser desenvolvidos, tendo em vista a melhoria do ensino secundário, especialmente por meio da adequação à realidade da universidade e aos avanços tecnológicos. Mas foi um fato não ligado diretamente à situação escolar dos Estados Unidos que acabou acelerando as propostas pedagógicas americanas e desencadeando um movimento internacional de modernização. O lançamento, em 1957, do primeiro foguete3 soviético – o Sputnik – levou o governo americano a tomar consciência de que, para resolver o problema da clara desvantagem tecnológica existente em relação aos russos, era necessário repensar o ensino de matemática e o de ciências (MIORIM, 1998).

Assim, o Movimento da Matemática Moderna – MMM, buscou implementar uma renovação curricular, pautada num ensino voltado para aproximação dos conteúdos dos cursos secundários com àqueles desenvolvidos à nível superior, dando ênfase as formalizações e se distanciando da matemática experimental, fundamentando-se na teoria dos conjuntos e estruturas algébricas, conforme nos informa o documento oficial PCN – Parâmetros Curriculares Nacional, de 1998:

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática. [...] O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas. (PCN, 1998, p.19 – 20).

No que diz respeito a prática do professor em sala de aula, o MMM não apresentou uma proposta nesse sentido, uma vez que o foco principal das reformas era o conteúdo matemático desenvolvido em sala de aula. Neste sentido, o pesquisador Jean Piaget, escreve em uma de suas obras que ....

> [...] a experiência é com frequência prejudicada pelo fato de que, embora seja "moderno" o conteúdo a ser ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista dos alunos) uma forma axiomática (PIAGET, 1973, p.19).

Em relação ao ensino de geometria, o Movimento da Matemática Moderna, ao propor maior ênfase a teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas, pouco propôs em relação a geometria, com exceção da inserção de conteúdos topológicos as series iniciais, conforme nos mostra a professora Maria Cecília Lema Silva, em seu artigo apresentado na XXIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, realizada em Recife, em 2011, ao expor análise feita em torno de livros didáticos de matemática, do período de implementação do MMM[1] nas escolas brasileiras:

> Logo nas primeiras atividades já se reconhece a proposta moderna do ensino de geometria. Temas como curvas abertas e fechadas, interior e exterior são conceitos novos, introduzidos a partir das propostas discutidas no MMM. Trata-se de inserção das estruturas topológicas no ensino de geometria (Silva, 2011, p.03).

Mendonça (2016), afirma que há somente uma inversão na ordem dos conteúdos, quando introduzidos os conceitos básicos de topologia, propostos pelo MMM; e a geometria euclidiana já trabalhada secularmente nas escolas, onde:

> Pode-se concluir que, em tempos de MMM, o ensino de Geometria toma uma ordem inversa de aprendizagem, passando inicialmente pelas noções de topologia, e posteriormente retornando à geometria euclidiana de sempre. É importante destacar a linguagem de conjuntos nesse processo, que é uma marca do MMM. A importância dessa inversão é creditada às figuras de Dienes e Piaget. (Mendonça, 2016, p.60)

Durante muito tempo, o ensino de geometria ficou relegado a segundo plano, refletindo na distribuição dos conteúdos, quase sempre isolados no final do plano anual, bem como nos capítulos finais dos livros didáticos. Tal fato se deve a priorização da aritmética e da álgebra nos currículos tradicionais, uma vez que o conteúdo de geometria não era contemplado nos exames de admissão à época.

Além disso, o ensino de geometria era mais contemplado em curso específicos, como cursos técnicos de desenho industrial, por exemplo. Devemos considerar também, a possibilidade de flexibilização dos conteúdos pela escola, propiciada com o advento da Lei

[1] Movimento da Matemática Moderna

5692/71, quando permite a adequação dos conteúdos pelo professor, conforme a realidade e a necessidade do contexto escolar. Tal fato, segundo Pavanello (1993), faz com que...

> *A maioria dos alunos do 1º grau deixa, assim, de aprender geometria, pois os professores das quatros séries iniciais do 1º grau limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo da geometria passa a ser feito – quando não eliminado – apenas no 2º grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação, porque o desenho geométrico é substituído, dos dois graus de ensino, pela educação artística. (Pavanello, 1993, p.13)*

No entanto, com a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (5ª a 8ª séries), a partir da década de 90, o ensino de geometria na educação básica passa a ser visto sobre uma nova ótica. Neste documento, os conteúdos são divididos em quatro blocos, à saber: Números e operações, grandezas e medidas, espaço e forma e tratamento da informação. O bloco concernente a espaço e forma, que diz respeito aos conteúdos de geometria que deveriam ser desenvolvidos no ensino fundamental II, aponta caminhos metodológicos para o desenvolvimento de competências por parte do educando, considerando que:

> Neste ciclo, os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com as formas nele presentes. Assim é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas (quanto à planicidade, quanto à dimensionalidade), as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformação (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução (Brasil, 1998, p.68).

No que diz respeito a prática educativa, o ensino tradicional, centrado nas ações do professor, tendo o aluno como mero receptor, tem suas implicações diretas no ensino da geometria, uma vez que tal forma de ensinar centra suas ações pedagógicas no modelo de exposição e memorização do conteúdo através da repetição de exercícios, não possibilitando a construção do conhecimento geométrico dentro de um contexto, por exemplo, investigativo.

4 Tendências em educação matemática

Dentre as diversas tendências em educação matemática, podemos destacar: Etnomatemática, Resolução de problemas, História no Ensino da Matemática, Modelagem matemática, Recursos Tecnológicos na educação matemática e Investigação Matemática. Abaixo faremos uma breve descrição informativa sobre essas tendências, tendo as duas últimas um tratamento mais detalhado, nos capítulos seguintes, uma vez que fundamentam o presente trabalho.

4.1 Etnomatemática

A etnomatemática, como tendência pedagógica de educação matemática, tem no brasileiro Ubiratan D'Ambrósio seu principal expoente. A partir da década de 70, D'Ambrósio, ao observar as diferentes manifestações matemáticas de grupos culturais distintos, ao desenvolverem de modo particular um saber matemático característico, sem as fundamentações da matemática acadêmica, propõe uma linha de pesquisa, que mais tarde o mesmo definiu como Programa de Pesquisa Etnomatemática. D'Ambrósio (2009), propõe que...

> Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo ticas] para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer [que chamo de matema] como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo de etnos] (D'AMBROSIO, 2009, p.60)

D'Ambrósio (2005), informa que a Etnomatemática não deve ser percebida exclusivamente como o conhecimento matemático característico de uma raça ou etnia, apesar de, numa primeira interpretação etimológica do termo, sermos levados a essa conclusão errônea. Para tanto, o mesmo esclarece que:

> A abordagem a distintas formas de conhecer é a essência do Programa Etnomatemática. Na verdade, diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é apenas o estudo de "matemáticas das diversas etnias". Criei essa palavra para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (matema) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos). A disciplina denominada matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa mediterrânea, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo. (D'AMBROSIO, 2005, p.113 - 114)

Dessa forma, a etnomatemática se apresenta como uma possibilidade de construção e reconstrução do conhecimento matemático, a partir dos saberes próprios de cada cultura ou grupo, valorizando o saber matemático e a realidade social, cultural e histórica dos envolvidos, além de oferecer condições para um ensino contextualizado e significativo. Neste sentido, D'ambrósio (2013), afirma que a proposta pedagógica do Programa Etnomatemática é...

> *fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo 'agora' e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais, e estamos, efetivamente, reconhecendo na educação a importância das várias culturas e tradições na formação de uma nova civilização (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 43).*

Em sala de aula, por exemplo, a etnomatemática poderá ser utilizada através de investigação em campo sobre os saberes geométricos envolvidos na construção de cesto de vimes nas comunidades rurais; em um projeto de pesquisa em torno da matemática utilizada na construção de pequenas embarcações em regiões ribeirinhas.

4.2 A resolução de problemas

O avanço tecnológico e a sociedade moderna exigem cada vez mais cidadãos capazes de atuar de forma criativa e segura nos mais diversos ambientes. O papel da escola se modifica, conforme a sociedade avança e evolui. Neste sentido, Pontes (2019),informar que:

> A sala de aula se torna ambiente agradável quando se apresenta práticas motivadoras e criativas com perfeita sintonia com o mundo moderno, recheado de indivíduos de raciocínio lógico apurado intuitivos e de pensamento matemático aumentado. O mundo tecnológico e a matemática se confundem por haver uma relação biunívoca entre o modelo criador e o ser criado. O ensino tradicional, dos conteúdos de matemática, deve ser substituído por um ensino motivador aproximando o aluno da sua realidade, essas mudanças devem-se essencialmente ao surgimento da era computacional. (PONTES, 2019, p.02)

Sendo assim, a capacidade de resolver problemas, os mais diversos possíveis, se torna essencial para a formação deste cidadão, capaz de se adequar as evoluções e mudanças que ocorrem na sociedade e no mundo tecnológico. A resolução de problemas como metodologia de ensino – aprendizagem da matemática, favorece o desenvolvimento de diversas habilidades, uma vez que, conforme descreve Dante (1998), os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;

- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas;

Nesta metodologia se opõe a forma tradicional do ensino da matemática através da velha técnica, onde o professor expõe o conteúdo e o aluno resolve exercícios modelos. A resolução de problemas propõe justamente o contrário, o aluno irá mobilizar seus conhecimentos matemáticos em torno de uma situação-problema e a partir daí construir novos conceitos, conforme nos ensina Van de Walle (2009):

> Em outras palavras, os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas. (VAN DE WALLE, 2009, P.57)

Na concepção da educação no modelo tradicional de ensino, aprendia-se matemática para resolver problemas, no entanto, com o avanço das pesquisas em educação matemática, constatou-se a possibilidade de, a partir de uma situação – problema, o professor organizar um ambiente de aprendizagem em que os educandos construam novos conceitos no decorrer do processor de resolução do problema. Neste sentido, Onuchic e Allevato (2011), afirmam que:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Na forma tradicional de ensinar matemática, os problemas propostos quase sempre objetivam a aplicação de um conceito desenvolvido na aula, onde há, em sua maioria, um roteiro padrão de resolução, levando a uma solução única, denominados como problemas fechados. Qualquer modificação neste roteiro gera dificuldade na percepção de como resolver este novo problema. Neste sentido, Santos (2002), nos informa que:

> Com o desenvolvimento dos estudos em Educação Matemática, as limitações da utilização privilegiada desse tipo de problema foram colocadas

> em evidência, surgindo, então, as ideias de problema aberto e situação-problema. Apesar de apresentarem objetivos diferentes, como mostrarei mais adiante, esses dois tipos de problemas tomam por eixo central colocar o aluno, guardadas as devidas proporções, numa situação análoga àquela em que muitas vezes o matemático se vê ao exercer sua atividade; o aluno deve, então, diante de problemas desses tipos, ser capaz de realizar TENTATIVAS, estabelecer HIPÓTESES, TESTAR essas hipóteses e VALIDAR seus resultados, provando que são verdadeiros ou, em caso contrário, mostrando algum contraexemplo (SANTOS, 2002, p.01, grifo do autor).

Esta nova visão de problema matemático condiz com o ensino pautado em competências e habilidades, defendidos na BNCC – Base Nacional Comum Curricular, quando esta aponta como uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.523).

Neste sentido, a resolução de problemas como uma metodologia de ensino – aprendizagem de matemática, certamente corrobora com a formação integral do educando, já que possibilita a ação autônoma do educando na construção do conhecimento e, por conseguinte, o desenvolvimento de competências e habilidades.

4.3 História no ensino da matemática

O uso da história da matemática como auxiliar no processo de ensino, é uma ferramenta poderosa para dar significado ao conteúdo trabalhado em sala de aula, bem como gerar espaço para a contextualização e interdisciplinaridade, ajudando assim a desmitificar crenças estabelecidas em torno da evolução da matemática enquanto ciência e do processo de aprendizagem da mesma. Neste sentido, a BNCC, indica que:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e Softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 296).

Ainda a BNCC, reflete que "um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história" (BRASIL, 2018, p.522). Por sua vez, os PCNs do ensino médio destaca a habilidade de

“Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade” (BRASIL, 1999), corroborando com a ideia do uso da história da matemática como um instrumento metodológico em sala de aula.

Não existe um modelo, um roteiro específico para o desenvolvimento de uma aula utilizando a história da matemática como suporte metodológico, cabendo ao professor buscar caminhos que possibilitem a utilização de tal metodologia em sala de aula. Podemos citar como possibilidades, o ensino por projetos interdisciplinar, onde o tema (conteúdo matemático) a ser desenvolvido, passa a se relacionar com as outras áreas do conhecimento. Por exemplo, em relação ao conteúdo que envolva as operações fundamentais, no ensino fundamental, um projeto interdisciplinar, envolvendo as áreas de Matemática, História, entre outras, pode buscar retratar da origem dos números à as operações babilônicas, passando pelas técnicas de calcular dos egípcios, mostrando os aspectos histórico-culturais e a forma de fazer matemática de cada época.

Dentre diversas pesquisas voltadas para o uso da história da Matemática em sala de aula, destacamos o trabalho de Jelin (2021), que em sua dissertação de mestrado profissional reflete sobre a importância desse recurso didático e aponta possibilidades de aplicação da história da matemática, através de “tarefas” alinhadas as habilidades e competências preconizadas na BNCC do ensino médio, oferecendo um excelente material para uso em aulas de matemática.

4.4 Modelagem matemática

A construção histórica da maioria dos conceitos matemáticos ocorrera através de atividades de modelagem, quando se buscou solução para problemas de natureza prática, investigando, criando hipóteses, testando conjecturas, até a obtenção de uma solução. Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2002, p.61), pode ser entendida como “a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Em relação a Modelagem Matemática, Biembengut e Hein (2013), afirmam que:

> A modelagem Matemática, originalmente, como metodologia de ensino-aprendizagem parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema. Trata-se, é claro, de uma forma extremamente prazerosa e que confere significativos conhecimentos seja na forma de conceitos matemáticos, seja sobre o tema que se estuda. Há o inconveniente de não sabermos, inicialmente, por onde o modelo passará, ou seja, nem sempre o ferramental matemático requerido está ao alcance do educando e mesmo do professor (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p.28)

Assim, a Modelagem Matemática propicia ao educando a possibilidade de construir o conhecimento matemático necessário à resolução de um problema do cotidiano ou de outra área do conhecimento, de forma significativa. Burak (1992, p.290) sugere-se que ao trabalhar com Modelagem Matemática, seja dado aos alunos a possibilidade de escolha do tema a ser pesquisado, valorizando o contexto e a realidade sociocultural dos mesmos.

Para a realização de uma atividade de Modelagem Matemática em sala de aula, se faz necessário um planejamento rigoroso, uma vez que o tema escolhido pelos educandos pode fazer com que se apresente situações mais complexas e que exijam um arcabouço matemático para a resolução, que não esteja ao nível de formação matemática da turma. Almeida et al (2013), estabelece que:

> Uma atividade de Modelagem Matemática, nesse contexto, envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação – problema, as quais caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.15

Em relação as etapas em um processo de modelagem matemática como metodologia de ensino – aprendizagem da matemática, Burak (2010), destaca a importância de um planejamento por parte do professor que viabilize as seguinte etapas:

1) Escolha do tema – Discutido e definido pelos alunos.
2) Pesquisa exploratória – Inteiração com o tema, através de pesquisa nas mais diversas fontes;
3) Levantamento do(s) problema(s) – Elencar questionamentos, levantar hipóteses sobre os questionamentos;
4) Resolução do(s) problema(s) e o trabalho dos conteúdos matemáticos no contexto do tema – Aplicar os conhecimentos matemáticos necessários em busca do modelo matemático que solucione o problema.
5) Análise crítica da(s) solução(ões) – Discutir as soluções apresentadas, interpretando sua validade no contexto do tema escolhido.

O ensino da através da modelagem matemática atende aos pressupostos da BNCC, uma vez que, segundo este documento os estudantes devem:

> *desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, pg. 519).*

Dessa forma, a modelagem matemática em sala de aula, possibilita o desenvolvimento de competências e habilidades pelo aluno, dando a possibilidade de uma aprendizagem significativa dos conteúdos e conceitos matemáticos, além de contribuir na formação integral dos educandos.

5 A Investigação Matemática em Sala de Aula

5.1 O que é investigação Matemática como metodologia de ensino

As tradicionais aulas expositivas, onde o professor centraliza todo o saber, atuando como detentor máximo do conhecimento, tendo o aluno como mero receptor, não cabe mais na realidade da educação do mundo moderno. A inquietude frente ao novo, a realidade tecnológica, a necessidade de aprender constantemente, fazem ou deveriam fazer com que a escola busque novas metodologias, não mais centradas na transmissão do conhecimento, mas que valorizem a capacidade de aprende a aprender dos estudantes atuais. Neste sentido, Braumann (2002) reforça a necessidade da mudança de paradigma em relação as aulas de matemática:

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p.5).

Assim, a investigação matemática surge como uma possibilidade frente ao ensino tradicional da matemática, uma vez que possibilita ao educando construir/reconstruir conhecimento, atuando diretamente sobre o objeto de aprendizagem, não tendo mais o professor como tutor e detentor do saber. No entanto, vale ressaltar que, conforme nos informam Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), investigar em sala de aula de matemática não significa desenvolver uma pesquisa, nos moldes dos pesquisadores matemáticos:

> Em contexto de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muitos sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muitos difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (Ponte, et al. 2013, p. 09).

Fiorentini e Lorenzato (2006), chamam a atenção para a diferenciação entre aulas investigativas e situações de investigação matemática. Segundo esses autores, aulas investigativas são...

> *aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno*

> *e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática. (FIORENTINI, LORENZATO, 2006, p.29).*

Por sua vez, Shio (2021), destaca que a adoção da investigação matemática em sala de aula, leva ao desenvolvimento:

- do pensamento matemático;
- do uso do conhecimento e competências matemáticas;
- da capacidade de atribuir novos significados ao conhecido;
- do desenvolvimento das habilidades de pesquisar, selecionar e organizar;
- da criatividade e do pensamento crítico;
- da iniciativa responsabilidade e persistência;
- da habilidade de argumentar e comunicar matematicamente;
- da autoconfiança no próprio desempenho matemático;
- da capacidade de trabalhar de forma autônoma;

É notório que a utilização da investigação matemática como metodologia de ensino – aprendizagem, oferece instrumentos que possibilitam a construção efetiva dos conceitos matemáticos, num contexto onde os alunos atuam com protagonismo, desenvolvendo assim competências essenciais a formação cidadã, tais como, autonomia de pensamento e as demais acima listadas. Dessa forma, a prática de investigação, experimentação, em aulas de matemática, aproxima o aluno da realidade da investigação científica, favorecendo a construção/apropriação efetiva do conhecimento, em detrimento da mecanização e memorização, propiciando uma aprendizagem significativa.

5.2 BNCC e a Investigação Matemática em sala de aula

A reforma do ensino médio, proposta pela lei 13.415/2017, que alterou a Lei 9394/1996, lei de diretrizes e bases da educação nacional, no tocante a estruturação curricular, traz uma nova organização, norteada pela BNCC – Base Nacional Comum Curricular. Na introdução deste documento Brasil (2017), percebe-se seu objetivo principal:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE)(BRASIL, 2017, p.07).

Em relação a organização curricular do novo ensino médio, a lei 13.415/2017, em seu artigo 35A, propõe uma reestruturação por Áreas de Conhecimentos, não abolindo a presença dos componentes curriculares/disciplinas, mas integrando-os e fortalecendo-os conforme objetos de conhecimentos afins, promovendo a contextualização e a interdisciplinaridade. A partir daí, o Ensino Médio, em relação a organização curricular, apresenta quatro áreas de conhecimento:

- Linguagens e Suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e Aplicadas;
- Ciências da Natureza e Suas Tecnologias;
- Matemática e Suas Tecnologias;

A BNCC estabelece além das competências gerais para a educação básica, àquelas inerentes a cada área de conhecimento.

> Na BNCC, para cada área do conhecimento, são definidas competências específicas, articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio. Essas competências específicas de área do Ensino Médio também devem orientar a proposição e o detalhamento dos itinerários formativos relativos a essas áreas (BRASIL, 2017, p.470).

Em relação a área de Matemática e Suas Tecnologias, a BNCC institui 5 competências especificas para o ensino médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p.523).

Em relação aos objetivos propostos neste trabalho, destacamos a importância da quinta competência, uma vez que ao sugerirmos a investigação matemática como metodologia auxiliar na construção de conceitos geométricos, esta pressupõe habilidades que quando desenvolvidas, geraram tal competência, conforme a BNCC corrobora:

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições (BRASIL, 2017, p.540).

Em um ambiente de investigação matemática o aluno atua, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.23) "como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor". Dessa forma, criar um ambiente de investigação matemática em sala de aula é oferecer ao educando a oportunidade da construção de competências e habilidades, que no modo tradicional de "ensinar matemática" impossibilita-os.

5.3 O Papel do professor e do aluno num processo de investigação Matemática

Em um processo de investigação matemática em sala de aula, professor e aluno assumem papéis distintos daqueles que tradicionalmente exercem nas aulas de matemática. Ambos passam a exercer funções essenciais no processo de investigação.

O aluno assume papel preponderante, uma vez que o mesmo passa a atuar como ator central na construção do conhecimento matemático. Na visão tradicional de ensino, o aluno atua como expectador, onde o professor age como detentor do conhecimento e através de aulas, quase sempre expositiva, "transmite o conhecimento" aos alunos. Em um ambiente de investigação matemática em sala de aula, Ponte et al, (2013, p.47), aponta que o professor tem papel determinante, tendo que atuar dando autonomia ao educando, mas buscando orientá-los sempre que necessário.

Numa aula norteada por um processo de investigação matemática, os agentes envolvidos no processo atuam sob um novo olhar, agora agem como uma equipe em busca da construção do conhecimento. O aluno atuará sobre o objeto do conhecimento, buscando criar conjecturas e hipóteses, em torno de um problema, de um questionamento, enquanto, segundo Ponte (op.cit. p.47) o professor buscará "desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles"

Ao se propor desenvolver atividades investigativas em aulas de matemática, o professor terá que adotar novas posturas diante dos cenários investigativos, uma vez que o mesmo deverá atuar como instigador do ambiente de investigação, assumindo a posição de mediador, através do qual os alunos irão ser o centro do processo.

5.4 Etapas num processo de investigação matemática

Em um processo de investigação matemática em sala de aula, segundo Ponte et al (2013, p. 25), devem ocorrer três etapas essenciais para o êxito da atividade:

5.4.1 Introdução da tarefa

Nesta etapa o professor irá propor oralmente ou por escrito a atividade a turma. Pode ser feita através de uma atividade de resolução de problemas, onde o professor irá aproveitar a oportunidade para rever ou apresentar conceitos essenciais durante o processo de investigação.

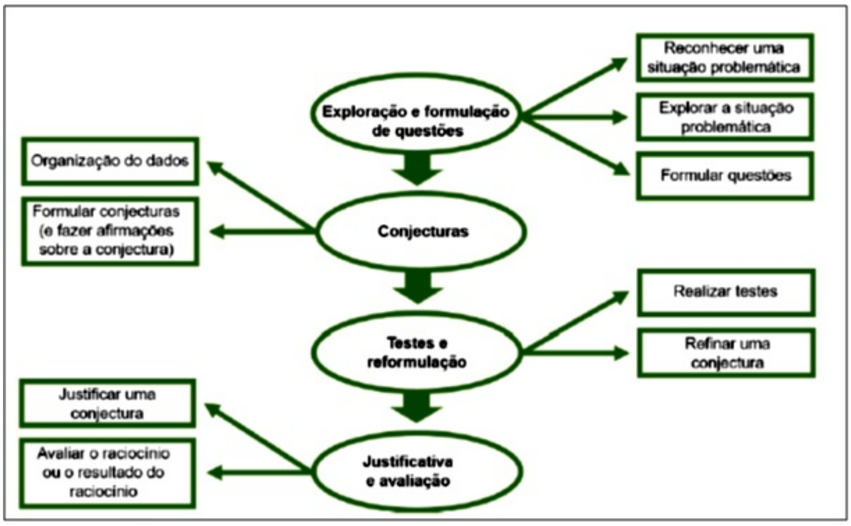
5.4.2 Realização da investigação

Os alunos desenvolvem a atividade investigativa, individualmente, em pequenos grupos ou envolvendo toda a turma, tendo o professor como um auxiliador neste processo, objetivando nortear o andamento da investigação. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), esta etapa demanda quatro momentos:

> Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática. Como referimos alguns desses processos são: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.29).

A figura 5.1 mostra as características de cada um desses momentos:

Figura 5.1 – Momentos na realização da investigação matemática



Fonte:Leivas e Lutz (2019).

Para que o processo investigativo aconteça de forma satisfatória, é essencial que estes momentos realmente ocorram, para tanto, é necessário que o educando esteja realmente motivado a atuar fora de zona de conforto, sendo indispensável que, segundo Ponte et al (2013, p.28) o professor crie um ambiente e informe os alunos do papel que terão que desempenhar.

5.4.3 Discussão dos resultados

É o momento em que os resultados alcançados serão relatados a turma, podendo ocorrer, por exemplo, através de explanação oral dos resultados alcançados individualmente/grupos ou elaboração de relatórios. Neste ponto da investigação ocorrerá a formalização dos conceitos construídos no decorrer da atividade, podendo o professor utilizar a oportunidade para demonstrar matematicamente os conceitos desenvolvidos na investigação e avaliar o desempenho da turma.

Existem diversos trabalhos publicados em revistas, sites, etc., que evidenciam o uso das tecnologias em sala de aula de matemática. Dando um enfoque a utilização do GeoGebra como instrumento auxiliar num processo de investigação matemática, podemos citar o trabalho de Damim, Palharini e Pereira (2016) que, através de uma pesquisa qualitativa, envolvendo a exploração da função cosseno ($f(x) = A + B.cos(mx)$), buscaram evidenciar, através da variação dos parâmetros A, B e m, o comportamento gráfico da referida função e suas respectivas influências , no que tange as propriedades, tais como domínio, imagem, máximo e mínimos.

A investigação matemática se concentrou na análise do comportamento gráfico da função ($f(x) = A + B.cos(mx)$) para cada valor atribuído aos parâmetros A, B e m, tendo a função f(x)=cosx como referencial, considerando cada situação gerada a partir dos valores atribuídos à A, B e m. A tabela 5.1 destaca as conclusões alcançadas após a análise dos resultados:

Tabela 5.1 – Resumo das alterações dos parâmetros e o comportamento gráfico

Parâmetro	**COMPORTAMENTO GRÁFICO**
A	Gráfico desloca-se no eixo y; a função “sobe” ou “desce” alternando a imagem em função dos valores dados para A.
B	Gráfico da função “aumenta” e inverte-se se o valor de B for negativo, alterando os valores da função no eixo y.
m	Gráfico da função fica “maior” ou “menor”, mas a imagem permanece a mesma.

Fonte: Damim, Palharini e Pereira (2016, p.12)

Damim, Palharini e Pereira (2016), destacam que...

> *durante esta atividade, foi observado que os alunos, acadêmicos do curso de Matemática, envolveram-se com o processo investigativo, discutindo alternativas de solução, pesquisando conceitos ainda não aprendidos e revisando conceitos já vistos e tudo isso com o intuito de investigar a situação dada pelo professor e puderam refletir sobre esta forma alternativa de aprendizagem de conceitos envolvendo a função cosseno. (DAMIM, PALHARINI, PEREIRA, 2016, p.14)*

Percebe-se aí a possibilidade e a importância da utilização da investigação matemática, aliada a tecnologia, como instrumento de construção de conceitos matemáticos de forma significativa, não somente com educandos da educação básica, mas como um caminho possível na formação inicial, bem como na formação continuada de professores.

Baur e Floreze (2017), utilizam em seu trabalho a teoria dos níveis de Van Hiele, objetivando avaliar o progresso do pensamento geométrico dos alunos, após a aplicação da metodologia de investigação matemática, tendo o software GeoGebra como instrumento auxiliar. A atividade investigativa envolveu, num primeiro momento, a construção no GeoGebra, na forma livre, de triângulos e quadriláteros e, depois, utilizando as orientações dos pesquisadores, objetivando fazer com que percebessem as propriedades invariantes em cada polígono estudado. De acordo com os dados obtidos na pesquisa, Baur e Floreze (2017), afirmam que "ao final do trabalho, os registros escritos dos estudantes e os vídeos produzidos pelos mesmos apontam mudanças quanto aos níveis de Van Hiele para as figuras trabalhadas durante a pesquisa", corroborando com as ideias defendida neste trabalho.

> *durante esta atividade, foi observado que os alunos, acadêmicos do curso de Matemática, envolveram-se com o processo investigativo, discutindo alternativas de solução, pesquisando conceitos ainda não aprendidos e revisando conceitos já vistos e tudo isso com o intuito de investigar a situação dada pelo professor e puderam refletir sobre esta forma alternativa de aprendizagem de conceitos envolvendo a função cosseno. (DAMIM, PALHARINI, PEREIRA, 2016, p.14)*

Destacamos também o trabalho de Andrade, Guimarães e Oliveira (2012) que apontam a utilização de objetos de aprendizagem, construídos a partir do GeoGebra, como instrumentos de ensino-aprendizagem da matemática. Gutierrez (2004), apud Andrade, Guimarães e Oliveira (2012, p.03), informa que:

> Um objeto de aprendizagem pode ser conceituado como sendo todo objeto que é utilizado como meio de ensino/aprendizagem. Um cartaz, uma maquete, uma canção, um ato teatral, uma apostila, um filme, um livro, um jornal, uma página na web, podem ser objetos de aprendizagem. A maioria destes objetos de aprendizagem pode ser reutilizada, modificada ou não e servir para outros objetivos que não os originais (GUTIERREZ, 2004, p.6).

Apesar do trabalho apresentado pelos pesquisadores se referir ao ensino-aprendizagem de Funções (quadráticas e trigonométricas), o modelo sugerido é adaptável ao ensino de geometria, pois a ideia central do uso de objetos de aprendizagem com o GeoGebra é possibilitar a exploração, a manipulação de parâmetros e a visualização das transformações ocorridas, gerando a possibilidade de investigações em torno de determinado conteúdo geométrico. Neste sentido, os referidos pesquisadores informam que:

> A partir das explorações podem aparecer não somente questões ligadas aos conteúdos estudados, mas de outros conteúdos que se relacionam. Através da exploração o aluno pode levantar conjecturas e o fato de poder transformá-las no "visual" contribui para que esteja mais seguro em suas argumentações. Após esses testes e a validação dos argumentos, o professor poderá conduzir os alunos a um processo de demonstração, mostrando a importância de seu aspecto formal. (ANDRADE; GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2012, p.14)

Neste sentido, destacamos o trabalho de Araújo e Pazuch (2018), que descrevem a construção de um objeto de aprendizagem (AO) em geometria, no GeoGebra, objetivando a investigação matemática das propriedades das diagonais de um trapézio isósceles, a partir da congruência de triângulo (caso LAL). Os autores destacam a importância do uso dos objetos de aprendizagem, através de softwares de geometria dinâmica (SGD), não somente considerando a construção do conhecimento por parte do discente; mas, consideram a relevância na formação do professor, quando mencionam que:

> Do mesmo modo, pode-se pensar na aprendizagem do professor que ensina matemática enquanto ele interage com o próprio OA. Essa interação pode acontecer tanto no momento em que ele explora as ideias e as relações matemáticas do próprio OA como no momento em que ele elabora esse tipo de recurso. O professor que ensina matemática pode elaborar os seus próprios OA, ao se apropriar de conhecimentos matemáticos (ideias, relações, propriedades, conceitos) instrumentais (ferramentas do software, comandos, linguagem de programação) e didáticos (tarefas, natureza do OA). Nesse sentido, indica-se a necessidade de oferecer aos professores da Educação Básica processos de formação continuada sobre a utilização de OA para o ensino de geometria. (ARAÚJO; PAZUCH, 2018, p. 18).

Percebe-se neste momento, a importância da aliança entre a investigação matemática e o uso de objetos de aprendizagens no GeoGebra, uma vez que requer atitudes exploratórias, tanto por parte dos educandos, quanto do professor.

6 A tecnologia como aliada no ensino de geometria: o uso do geogebra

A educação matemática na contemporaneidade não pode se distanciar da realidade tecnológica a qual os alunos estão submersos cotidianamente. Neste sentido, se faz necessário uma reconfiguração do papel da escola e do professor neste mundo tecnológico. A lousa e o pincel devem dá espaço, não que sejam substituídos em sua totalidade, para as novas tecnologias midiáticas e, porque não dizer, virtuais. No entanto, é premente que a escola e o professor, principalmente, assumam um papel inovador, conforme nos ensina Gatti (1992):

> Está na hora da escola assumir seu papel na sociedade atual. As inovações que temos presenciado têm deixado a educação para trás e também, os educadores, para trás. Estamos convivendo com uma geração de jovens que estão adquirindo novas habilidades e formas de pensar diante de um vídeo game, por exemplo, os quais, na escola, assistem ao professor demonstrar, de forma clássica, um teorema. Tal fato nos leva a pensar na necessidade urgente de abrir essas novas formas do saber humano, de gerar e de disseminar o conhecimento na formação do professor, quer seja na sua formação básica no curso de magistério, quer seja na sua formação continuada, isso se não quisermos ficar estagnados no século l8. (GATTI, 1992, p. 157)

Diversas são as possibilidades tecnológicas que podem ser utilizadas como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Computadores e seus mais diversos programas, tablets com seus aplicativos educativos, o smartphone e suas funcionalidades, são alguns exemplos. Considerando o papel do professor diante dos avanços tecnológicos e da necessidade da inserção deste mundo na educação, Almeida (2000), reflete sobre as atribuições do professor em relação ao uso pedagógico do computador em sala de aula; no entanto, consideramos válida tal reflexão para as tecnologias educacionais em geral:

> Diante desse contexto de transformação e de novas exigências em relação ao aprender, as mudanças prementes não dizem respeito à adoção de métodos diversificados, mas sim à atitude diante do conhecimento e da aprendizagem, bem como a uma nova concepção de homem, de mundo e de sociedade. Isto implica que o professor terá papéis diferentes a desempenhar, o que torna necessários novos modos de formação que possam prepará-lo para o uso pedagógico do computador (ALMEIDA, 2000, p.16)

Almeida (2000), aponta algumas competências necessárias ao professor, quando resolver atuar em um ambiente educacional tecnológico:

> • procurar construir um quadro teórico coerente, que oriente sua conduta de professor mediador;
> • dominar as técnicas de programação e os recursos do software em uso, de forma a fornecer subsídios aos alunos;
> • procurar dominar os conteúdos do campo de exploração trabalhado no computador pelos alunos; e, quando necessário, aprofundar estudos sobre os mesmos de forma a orientar a aprendizagem dos conteúdos e das respectivas estruturas envolvidos nas pesquisas;
> • estar sempre aberto a "aprender a aprender";
> • diante de um novo problema assumir atitude de pesquisador e levantar hipóteses; realizar experimentações, reflexões e depurações; buscar a validade de suas experiências (ALMEIDA, 2000, p.16).

Em relação ao uso do computador, as possibilidades de exploração desta ferramenta em sala de aula de matemática são as mais diversas, do uso das planilhas eletrônicas para a tabulação e análise de dados aos Softwares educacionais. No entanto, concordamos com Lima (2009), ao se referir a forma como este instrumento será usado no ambiente de aprendizagem matemática:

> [...] ao considerar as possibilidades de ensino com o computador, o que pretendo é destacar que a dinamicidade desse instrumento pode ser utilizada para que os alunos trabalhem como se fossem pesquisadores, investigando os problemas matemáticos propostos pelo professor e construindo soluções ao invés de esperarem um modelo a ser seguido (LIMA, 2009, p.36).

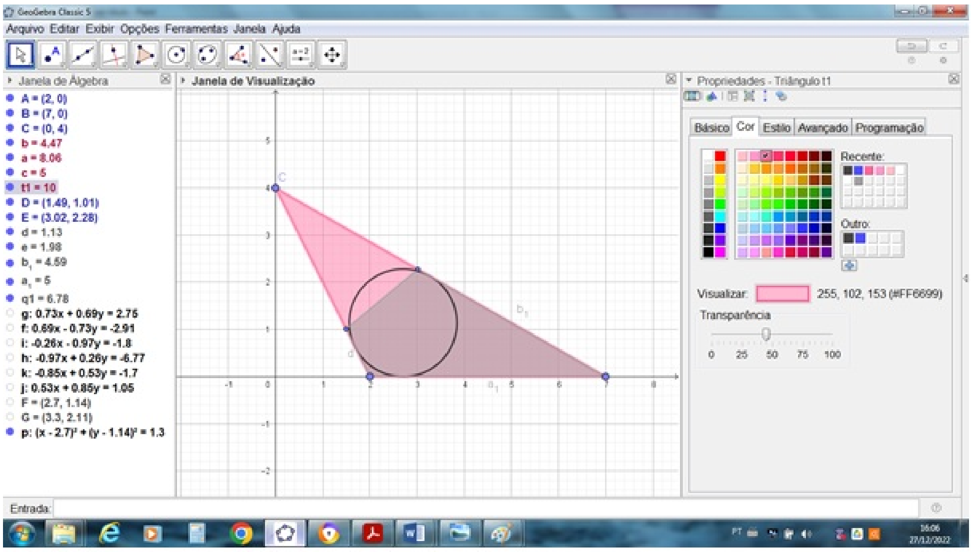
Estudos mostram que o acesso à tecnologia, em especial o computador, exerce influência no desempenho em Matemática. Assim, Staa (2007), nos informa que:

> Em 2005, a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) conseguiu mostrar que [...] os alunos que afirmar não ter acesso a um computador tiveram desempenho pior em Matemática. [...] Este é o estudo mais amplo já realizado neste sentido e indica que o aluno sem o computador está em franca desvantagem, tantos em termos de conhecimento de tecnologia, quanto em termos de desempenho em Matemática. (STAA, 2007, p. 27).

Neste trabalho iremos utilizar o Software GeoGebra como instrumento auxiliar na investigação de conceitos geométricos. O referido Software foi criado em 2001 pelo austríaco Markus Honenwarter, como parte de sua tese de doutoramento. É um software grátis, multiplataforma, podendo ser utilizado no computador, em smartphones e tablets.

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica, que permite a conexão entre a geometria, álgebra, aritmética e planilhas, oferecendo assim a possibilidade de múltiplas representações de um mesmo objeto. Há disponíveis para download diversas versões deste software, podendo ser baixado diretamente na página https://www.geogebra.org/?lang=pt. Neste trabalho utilizaremos a versão GeoGebra Classic 5, cuja interface mostramos na figura 6.1:

Figura 6.1 – Interface do GeoGebra Classic 5



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Há diversas atividades exploratórias, de construção e investigativas disponíveis na internet, que possibilitam a familiarização do professor com o GeoGebra, uma vez que ao se propor utiliza-lo em sala de aula, é necessário o domínio de suas ferramentas, de modo a garantir êxito em sua atividade. Sugerimos a página do Instituto GeoGebra – RJ http://www.geogebra.im-uff.mat.br/vtt.html , àqueles que queiram conhecer as funcionalidades deste software, lá encontrarão tutorais com esta finalidade, além de diversos trabalhos publicados para download. Na página https://www.geogebra.org/materials temos disponíveis mais de 1 milhão de atividades gratuitas para utilização/adaptação para a sala de aula.

7 Atividades Investigativas no Geogebra:Uma proposta para o ensino de Geometria

Nosso objetivo aqui é oferecer alguns exemplos de atividades investigativa no ensino de geometria, subsidiadas pelo uso da tecnologia, mais especificamente, pelo uso do software GeoGebra.

7.1 Investigando áreas de Triângulos

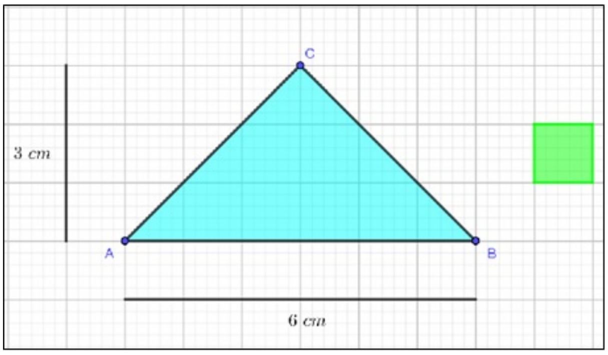
Essa investigação tem como objetivo fazer com que o aluno desenvolva de forma autônoma e intuitiva o conceito do cálculo de áreas de triângulos a partir da construção de diferentes triângulos com os vértices sobre retas paralelas e com a medida das bases definidas e iguais.

7.1.1 Introdução da tarefa

Utilizando malha quadriculada o professor apresentará à turma a seguinte atividade:

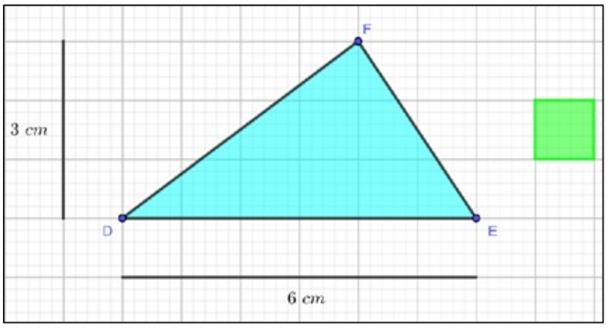
Nas figuras 7.1 e 7.2 temos os triângulos ABC e DEF, de base e altura medindo 6 cm e 3 cm, respectivamente. Considerando o quadrado verde como uma unidade de área (01 cm^2), determine a área de cada triângulo, em cm^2:

Figura 7.1 – Triângulo ABC



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Figura 7.2 – Triângulo DEF



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

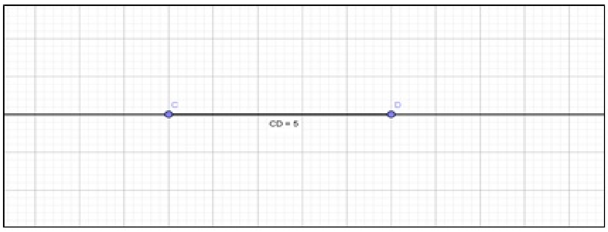
O professor, após os alunos apresentarem suas possíveis soluções, poderá sugerir à turma, devido à dificuldade de determinar a área do triângulo DEF, a construção do referido triângulo no GeoGebra e usando o ícone ÁREA, determinar o valor da área em questão, comparando com o valor obtido. A partir daí, o professor dará início ao processo de investigação.

7.1.2 Realização da investigação

Nesta etapa o professor irá orientar os estudantes a seguirem os seguintes processos investigativos:

i) Construa uma reta AB qualquer. Sobre a reta AB, construa um segmento CD, de medida 5 unidades.

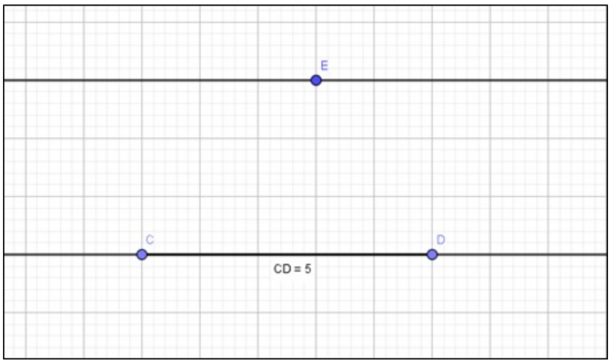
Figura 7.3 – Segmento CD, sobre a reta AB



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

ii) Por um ponto E, externo a reta AB, trace uma reta r, paralela à AB.

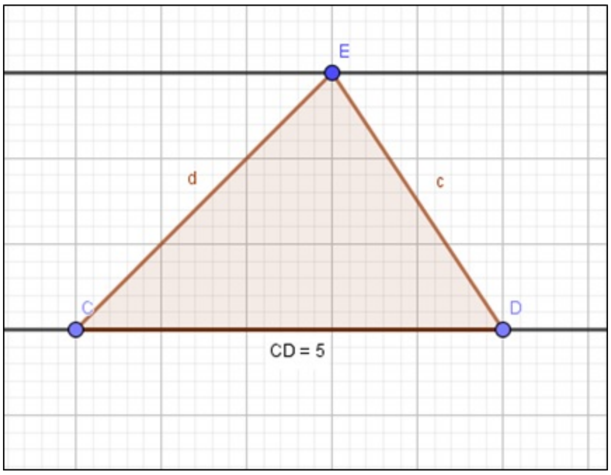
Figura 7.4 – Reta paralela à reta AB, passando por E



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

iii) Com a ferramenta POLÍGONO construa um triângulo CDE, com base CD.

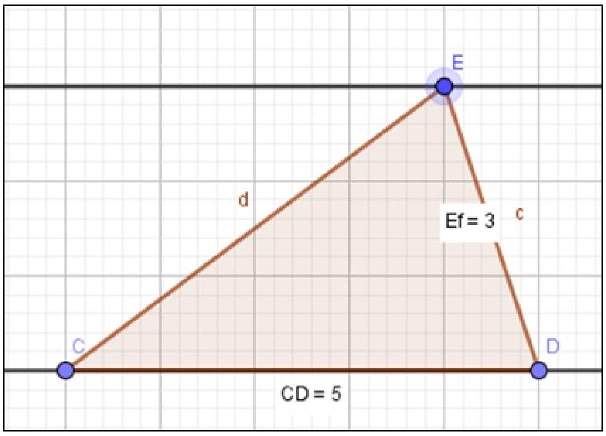
Figura 7.5 – Triângulo CDE, de base medindo 5 cm



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

iv) Usando a ferramenta DISTÂNCIA, selecione o vértice E e, em seguida, a reta AB, suporte da base CD do triângulo. O que essa distância representa no triângulo CDE?

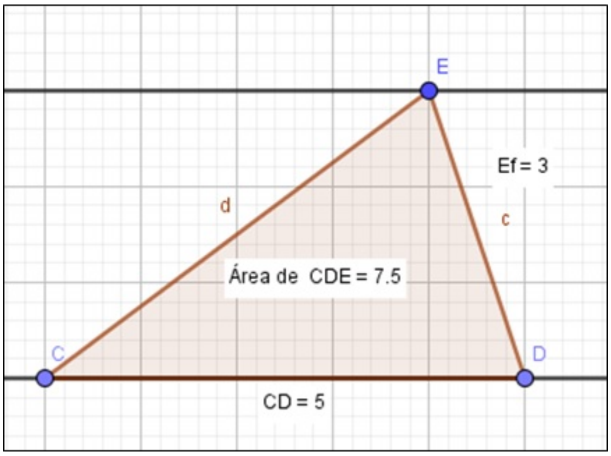
Figura 7.6 – Distância entre o ponto E e o segmento CD



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

v) Determine a área do triângulo CDE, usando a ferramenta ÁREA.

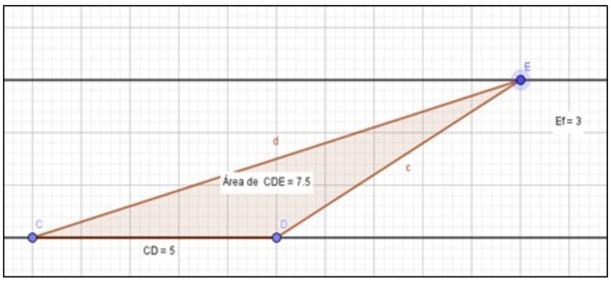
Figura 7.7 – Área do triângulo CDE



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

vi) Desloque horizontalmente o vértice E sobre a reta AB. O que acontece com a medida da área do triângulo?

Figura 7.8 – Deslocamento do ponto E e variação do triângulo CDE



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Nesta etapa, espera-se que o aluno perceba que ao deslocar o ponto E sobre a reta r, de modo que não varie a altura do triângulo, tendo a medida base CD fixada, não ocorrerá alteração na medida da área.

vii) Pelo vértice E, movimente verticalmente a reta r de modo que varie a distância (altura) e preencha os dados da tabela 7.1:

Tabela 7.1 – Variação da altura do triângulo CDE e suas respectivas áreas

Medida da base	Medida da altura	Área
5	3	7,5
5	4	10
5	5	12,5
5	6	15

Fonte: autor (2022)

viii) O que acontece com a medida da área do triângulo CDE? É possível estabelecer uma relação entre as medidas da base e altura do triângulo com a medida da área?

7.1.3 Discussão dos resultados

Neste ponto da investigação, o professor irá propor aos alunos a apresentação dos resultados obtidos na conclusão dos processos investigativos, podendo sugerir a produção de um relatório em grupo ou individual, a exposição oral dos resultados, etc. A fase de discussão dos resultados e de suma importância em uma aula com investigação matemática, uma vez que, conforme afirma Ponte et al (2013, p.41) “sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação”.

Neste momento, o professor deverá utilizar a oportunidade para formalizar o conceito de área do triângulo como o semiproduto da medida da base pela respectiva altura, ou seja, sendo b a medida da base e h a medida da altura, a medida da área do triângulo será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \tag{7.1}$$

7.2 Investigando a desigualdade triangular

Esta atividade objetiva fazer com que os alunos percebam que dados dois segmentos de medidas **a** e **b**, lados de um triângulo qualquer, o terceiro lado do respectivo triângulo deverá ter medida **c**, tal que: $c < a + b$.

7.2.1 Introdução da tarefa

Inicialmente o professor poderá propor aos alunos a seguinte situação - problema:

Dados dois segmentos AB e CD, de medidas 4 cm e 6 cm, respectivamente, construa 3 triângulos diferentes, que tenham estes segmentos como lado. Nessas condições, quantos triângulos distintos podemos construir?

Essa situação – problema tem como objetivo introduzir o processo investigativo, podendo ser resolvida com o uso de régua e compasso ou através do GeoGebra, através do transporte de segmentos. Aconselha-se que seja trabalhada em duplas, para que deste modo os alunos interajam e construam suas hipóteses. Espera -se que os alunos percebam, através das diferentes soluções construídas, a infinitude de triângulos que podemos construir dados dois lados.

Neste momento não se busca estabelecer a relação entre as medidas dos lados dados no problema e a medida do terceiro lado, determinado de acordo com as soluções expostas pelos alunos. O foco é a manipulação dos segmentos dados de modo a preparar o aluno para a atividade investigativa que ocorrerá a seguir.

7.2.2 Realização da investigação

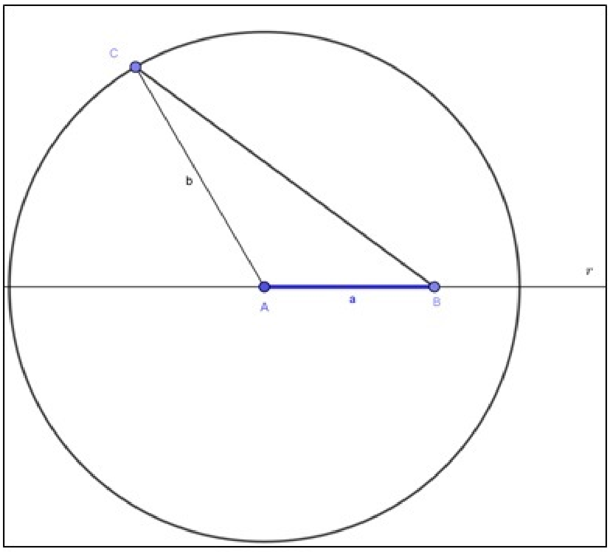
Nesta etapa o professor irá orientar os estudantes a seguirem os seguintes processos investigativos:

i) Construa uma reta r qualquer. Sobre a reta r, construa um segmento AB, de medida 4 unidades. Pelo ponto A, extremo do segmento AB, trace uma circunferência de raio medindo 6 unidades.

ii) Sobre a circunferência marque um ponto C qualquer e trace os segmento AC e BC, construindo assim o triângulo ABC, de lados AB, AC e BC.

A figura 7.9 ilustra a construção descrita nos itens i) e ii):

Figura 7.9 – Triângulo ABC



Fonte: Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Alguns questionamentos poderão ser feitos pelo professor, de modo a nortear o caminho da investigação:

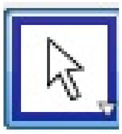
a) Esse triângulo terá sempre as mesmas medidas para os lados?

b) Se movimentarmos o ponto C, o que acontece com o triângulo? As medidas dos lados serão alteradas?

c) Qual a menor distância do ponto B à circunferência? E a maior distância?

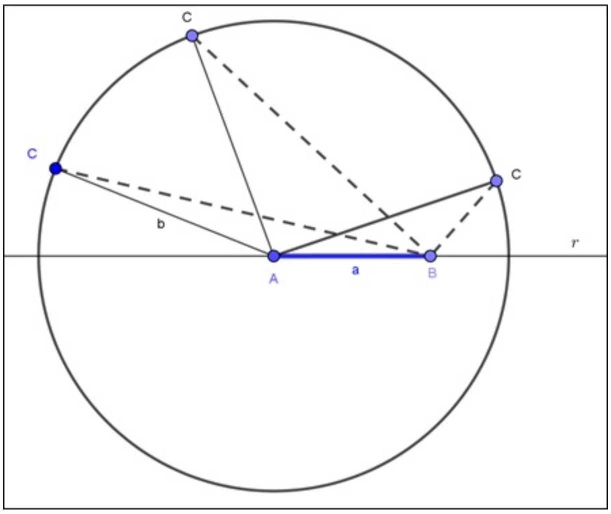
iii) Usando o ícone MOVER (representado na figura 7.10),desloque o ponto C sobre a circunferência. O que acontece com os lados do triângulo ABC?

Figura 7.10 – ícone do mouse



Fonte: Produzida pelo autor (2022)

Figura 7.11 – Deslocamento do ponto C sobre a circunferência e a geração de triângulos



Fonte:Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Alguns questionamentos que o professor deverá conduzir:

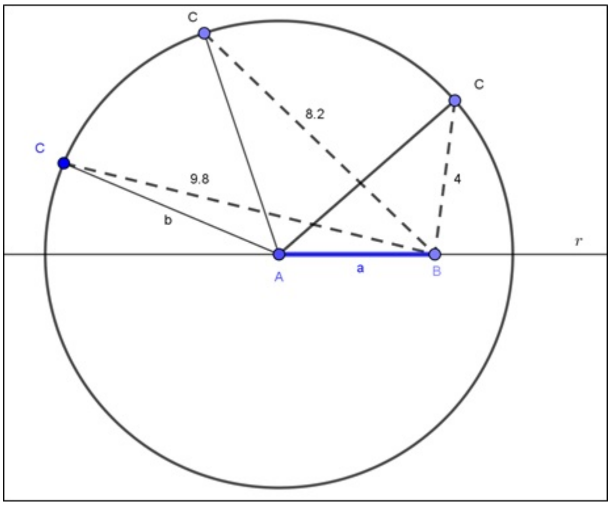
a) Existe um valor máximo para a medida do lado BC?
b) É possível estabelecer um intervalo de variação para a medida do lado BC?
c) Em caso positivo, qual será esse intervalo?

iv) Utilizando o ícone DISTÂNCIA representado na figura 7.12, determine o comprimento da medida de cada lado do triângulo ABC representado na figura 7.13. Movimente novamente o ponto C sobre a circunferência.

Figura 7.12 – ícone distância

Fonte:Produzida pelo autor (2022)

Figura 7.13 – Medidas dos lados do triângulo ABC, conforme deslocamento do ponto C sobre a circunferência



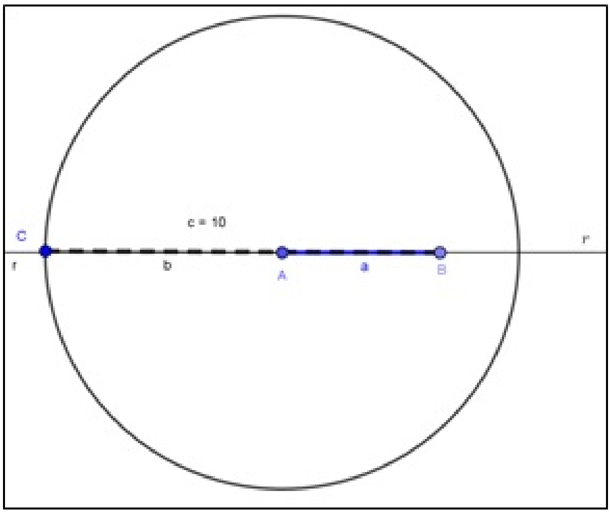
Fonte:Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

7.2.3 Discussão dos Resultados

No decorrer do processo investigativo, espera-se que os alunos percebam, ao realizarem o deslocamento do ponto C sobre a circunferência, que as a existência do triângulo ABC está condicionada a posição que o ponto C assume, ou seja, quando este estiver alinhado com os pontos A e B, inexistirá o triângulo ABC.

A figura 7.14 mostra o maior valor possível para a medida do segmento BC e a inexistência do triângulo ABC, em tal caso:

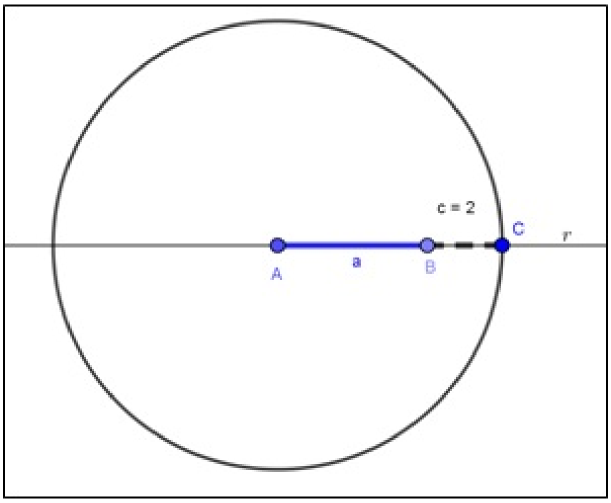
Figura 7.14 – Maior medida do segmento BC= c



Fonte:Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

Na figura 7.15, temos a visualização do segmento BC e sua menor medida possível e a inexistência do triangulo ABC:

Figura 7.15 – Menor medida do segmento BC= c



Fonte:Produzida pelo autor no software Geogebra.(2022)

O que se espera nesta etapa é que os alunos percebam quando inexistirá o triângulo ABC e estabeleçam o intervalo de existência do lado BC e, por conseguinte, do triângulo. A discussão dos resultados é o momento onde os alunos apresentarão as hipóteses construídas durante o processo de investigação, e o professor irá formalizar os conceitos construídos.

Dessa forma, considerando o intervalo |6 - 4| < c < |6 + 4 |, obtido no desenvolvimento da atividade, o professor poderá utilizar o GeoGebra para formalizar a seguinte proposição:

Em todo triângulo de lados com medidas a, b e c (b>a), vale a seguinte relação representada na inequação:

$$|b - a| < c < |b + a| \tag{7.2}$$

A discussão dos resultados é primordial para que os alunos sistematizem os conhecimentos adquiridos durante a investigação. Neste caso, essa discussão poderá ser feita através da exposição dos conceitos desenvolvidos pelos alunos. Esse momento também é crucial para que o professor avalie o trabalho desenvolvido, pois, segundo Azevedo (2020), na atividade de investigação...

> [...] como todas as outras, tem que haver avaliação, permitindo ao professor saber se seus alunos estão progredindo ou se é necessário repensar em sua ação nesse campo. Ao mesmo tempo, permite ao aluno saber o seu desempenho, e se é preciso haver melhora em seus conhecimentos. Entre a variedade de instrumentos de avaliação de natureza oral e escrita, podem ser utilizados o relatório, a observação, a apresentação oral, trabalhando individualmente ou em grupo. (AZEVEDO, 2020, p.304)

Foram propostas neste trabalho duas atividades envolvendo investigações geométricas, apoiadas pelo uso do GeoGebra. O uso de software de geometria dinâmica, no nosso caso em questão, o GeoGebra, oferece a possibilidade de modificações, manipulações, transformações em objetos geométricos, proporcionando a elaboração de hipóteses e conjecturas, essenciais no processo de investigação matemática. Azevedo (2020), afirma que essas atividades...

> [...] contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação de testes de conjecturas e a procura de demonstração de generalizações. A exploração de diversos temas de sua área pode também contribuir para concretizar a relação entre situações matemáticas e da realidade, desenvolvendo capacidades como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciando suas conexões e ilustrando aspectos interessantes da história e da evolução humana. Além disso, permite ao professor prosseguir uma recomendação curricular, hoje largamente aceita, de que deve ser dado tempo e oportunidade ao estudante para organizar as suas experiências espaciais. (AZEVEDO, 2020, p.305),

Em relação ao uso do software GeoGebra como um instrumento auxiliar em uma atividade envolvendo investigação matemática em sala de aula, Vaz (2012) destaca quatro etapas neste processo:

> **Experimentar** aqui significa que podemos usar o software, juntamente com o aluno para que ele mesmo faça suas experiências, movimente os objetos matemáticos, perceba as relações entre eles, compare álgebra e geometria, enfim, interaja com o objeto do saber.
> **Conjecturar** significa que depois de perceber as relações oriundas da experimentação é possível vislumbrar propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da Matemática. Uma vez feita à conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado que pode ser verdadeiro ou falso.
> **Formalizar** seria então a demonstração propriamente dita, ou evidenciar uma contra proposição da conjectura levantada com um argumento pedagógico compatível à série que se está trabalhando.
> **Generalizar** é o importante nível, pois após realizar os três níveis de construção de conhecimento é a hora de generalizar o resultado, ou seja, investigar outras situações e podendo até achar algumas situações particulares e por fim explorar o resultado obtido. (VAZ, 2012, p. 64).

Nota-se a importância de trabalhar a investigação matemática em sala de aula, tendo o uso do GeoGebra como instrumento auxiliar, uma vez que essa aliança gera múltiplas possibilidades de aprendizagem, contribuindo na aquisição de conceitos matemáticos de forma prazerosa e significativa. Neste sentido, Adolfo et al (2018, p.258), ao utilizarem o GeoGebra para realizar investigação de uma propriedade dos quadriláteros, afirmam que "a investigação matemática com o software GeoGebra proporciona aos alunos experiências dinâmicas ao facilitar a visualização de propriedades e relações matemáticas, abrindo um novo horizonte de possibilidades". No entanto, esses mesmos autores nos chamam a atenção para a necessidade de uma prévia familiarização por parte dos discentes com o software, uma vez que, segundo eles:

> *observou-se que algumas situações imprevisíveis podem ocorrer, como a falta de familiarização dos alunos em relação às tecnologias. O professor deve estar preparado para perceber que isto pode acontecer. Outra dificuldade que pode ser enfrentada ao empregar a metodologia sugerida é o tempo, pois os alunos devem antes conhecer o software e possuir conhecimento, mesmo que básico, de como trabalhar com o mesmo. Em nossas experiências de estagio notamos que é difícil conciliar uma atividade deste tipo com o tempo escolar, já que a mesma necessita de uma preparação prévia da turma em que será aplicada. (ADOLFO ET AL, 2018, p. 258)*

Concordamos com a necessidade de um prévio conhecimento do software por parte dos alunos e, por que não dizer, por parte dos professores também. Ao se propor utilizar investigação matemática com o GeoGebra, o professor deverá planejar minuciosamente as atividades, não somente no que tange aos conteúdos matemáticos que serão explorados, mas a forma como irá desenvolver a investigação no software.

8 Considerações finais

O avanço tecnológico trouxe para o âmbito escolar a necessidade de adequações do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que a sociedade do conhecimento evolui a cada instante e, por conseguinte, a escola precisa adaptar-se a essa evolução. Em relação ao ensino da matemática, é premente que a escola e os professores apresentem instrumentos que possibilitem o uso da tecnologia no ambiente de sala de aula, oportunizando uma aprendizagem de forma dinâmica e eficiente.

O presente trabalhou buscou apresentar uma proposta de aplicação de atividade investigativa como um instrumento de construção de conhecimento significativo, aliando a essa metodologia o uso do software GeoGebra como um mediador. Para tanto, foi feita uma análise bibliográfica buscando fundamentar os conceitos envolvidos na metodologia da investigação matemática e, também, apresentou-se duas atividades investigativas, com a utilização do GeoGebra, como forma de exemplificar e oferecer suporte ao presente trabalho.

Muito tem se falado em aliar a tecnologia com o ensino da Matemática, objetivando oferecer um ensino mais dinâmico e significativo para o educando. Consideramos que é imprescindível tal relação, no entanto, se faz necessário um aporte metodológico que ofereçam estratégias específicas para a implementação dessa aliança entre tecnologia e o processo de ensino – aprendizagem da matemática.

Neste sentido, consideramos importante a formação continuada do professor, no âmbito de aplicação das tecnologias digitais em sala de aula, uma vez que se faz necessário o domínio de qualquer tecnologia que se proponha a aplicar no ambiente escolar, de forma a garantir o alcance dos objetivos propostos no prévio planejamento.

Ponderamos também o fato de que o trabalho com investigação matemática requer mudança de postura, tanto do professor quanto do aluno, uma vez que, o exercício de tal proposta enseja atitudes e procedimentos que fogem aos padrões das aulas tradicionais. Conjecturar, testar hipóteses, validar conjecturas, são ações que permeiam o processo investigativo e, portanto, necessitam de uma ambiente favorável. Para tanto, um dos empecilhos apontados para a consecução do trabalho com esta metodologia em sala de aula, principalmente quando aliada ao uso do software GeoGebra, é o fator tempo, pois as atividades investigativas requerem um trabalho mais autônomo por parte dos alunos.

Dito isto, considerando a análise bibliográfica presente neste trabalho, bem como a construção das atividades investigativas sugeridas, constatou-se que Investigação Matemática, enquanto metodologia de ensino, é ferramenta poderosa que poderá contribuir na formação de conceitos matemáticos de forma mais dinâmica, principalmente quando aliada ao uso de tecnologias, através do software GeoGebra.

A metodologia da investigação matemática corrobora com as propostas defendidas na BNCC – Base Nacional Comum Curricular, pois o trabalho investigativo em busca da formulação de hipóteses e conjecturas propicia o desenvolvimento de competências e habilidades, uma vez que desenvolve o raciocínio logico, a percepção da matemática enquanto uma ciência viva e dinâmica, aprendizagem colaborativa, aplicação de processos e ferramentas matemática, entre outras.

Em relação ao GeoGebra e a investigação matemática, acreditamos que o referido software apresenta grande potencial para aliar o ensino investigativo e a tecnologia, já que oferece a possibilidade de interação direta do educando com o objeto de estudo investigado, seja através de objetos de aprendizagem dinâmica ou construções direcionadas. No âmbito deste trabalho foram sugeridas duas atividades dirigidas, envolvendo a investigação de conceitos geométricos (área do triângulo e desigualdade triangular) através do GeoGebra. Espera-se que as mesmas possam ser aplicadas em ambiente de sala de aula de matemática e assim seja constatada a possibilidade da construção significativa dos conceitos matemáticos desenvolvidos em cada proposta, através da metodologia da investigação matemática aliada a tecnologia.

Por fim, espera-se que o presente trabalho venha contribuir na desmitificação do ensino da matemática, dando suporte para a utilização da investigação matemática em sala de aula aliada a tecnologia, bem como para a formação continuada do professor e, também, sirva de suporte para futuras pesquisas na área de educação matemática.

9 Referências Bibliográficas

ADOLFO, Ana Carolina S. GONÇALVES, Vinícius A. L. SILVA, Jéssica V. da. SOUZA, Uender Barbosa. Proposta de Investigação Matemática com GeoGebra e uma propriedade dos quadriláteros. COINSPIRAÇÃO – Revista de Professores que ensinam Matemática – SBEM/Mato Grosso. V. 1, Nº 02, 251 – 260, Julho/Dezembro de 2018. Disponível em: http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/42/46. Acessado em 04/01/2023.

ALMEIDA, Maria E. de. Informática e formação de professores. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P.; VERTUAN, Rodolfo E.; Modelagem Matemática na educação básica. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

ANDRADE. José A. A. GUIMARÂES. Simone U. OLIVEIRA. Iara Letícia L. As potencialidades do GeoGebra em processos de investigação matemática: uma análise do desenvolvimento de objetos de aprendizagem da EaD no ensino presencial. Artigo. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 9657, pp.165-279. 2012. Disponível em:https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/9598/7161. Acessado em: 29/12/2022.

ARAÚJO. Rafael E. G. PAZUCH. Vinícius. Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria. Artigo. Disponível em: BoEM, Joinville, v. 6, n. 12, p. 55-74, dez 2018. Acessado em: 30/12/2022.

AZEVEDO, Nathália de Melo. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA DOS AUTORES: JOÃO PEDRO DA PONTE; JOANA BROCARDO E HELIA OLIVEIRA. Resenha. Ensino da Matemática em Debate (ISSN: 2358-4122), São Paulo, v. 7, n. 2, p. 303-307, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/47634/pdf. Acessado em 03/01/2022.

BASSANEZZI, R. C. Ensino – aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BAUR. Anelise Pereira. FLOREZE. Leandra Anversa. Investigação Matemática, GeoGebra e produção de vídeos no ensino e aprendizagem de quadriláteros e triângulo. Comunicação científica. VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. Canoas – RS, 2017. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper /viewFile/7201/3485. Acessado em:29/12/2022.

BERLINGHOFF, William P; GOUVÊA, Fernando Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza Gomide e Helena

Castro. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem Matemática no Ensino.5ª ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei n°9394/96 – Brasília: Imprensa Oficial, 1996.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Brasília: MEC, 2018.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. F. Dionísio (Eds.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BOYER. Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo. 1974.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1992. Disponível em: https://www.psiem.fe.unicamp.br/pf-psiem/burak_dionisio _d.pdf. Acessado: 03/10/2022.

DANTE, Luiz R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

D'AMBROSIO. Ubiratan. Etnomatemática: O Elo entra as tradições e a modernidade.5º Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 3.ed. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2009.

DAMIN, Willian; PALHARINI, Bárbara N.; PEREIRA, Rudolph dos S. G. Investigações Matemática em sala de aula: Contribuições do GeoGebra para a aprendizagem da função cosseno e seus parâmetros. Revista Tecnologias na Educação- Ano 8-Vol.17-Dez-2016. Disponível em: https://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2016/09/Art33-ano8-vol17-dez2016.pdf. Acessado em 26/12/2022.

EVES, Howard. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria. Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1992.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GATTI, B. Informação e Tecnologia. In: Serbino, R. V., Bernardo, M. V. C. (Org.)

Educadores para o Século XXI: Uma Visão Multidisciplinar. São Paulo: UNESP, 1992.

GONZÁLES C., Paola. CODIGOS VISUALES DE LAS PINTURAS RUPESTRES CUEVA BLANCA: FORMAS, SIMETRIA Y CONTEXTO. Boletín del Museo Chileno de Arte Precolombino. 2005, 10(1), 55-72. Acessado em 6 de Abril de 2021. ISSN: 0716-1530. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=359933351004

GUTIERREZ, S. S. Distribuição de conteúdos e aprendizagem on-line. RENOTE –Revista Novas Tecnologias na Educação, v.2, p.1-14, 2004.

HOLOS, [S. l.], v. 3, p. 1–9, 2019. DOI: 10.15628/holos.2019.6703. Disponível em: https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/6703. Acesso em: 23 dez. 2022.

JELIN, Daniel Fernandes. A história da Matemática aplicada à BNCC – EM: reflexões, relatos e tarefas. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. Sorocaba – SP. 2021. 174f. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/14572/dissertacao_a_historia_da_matematica_aplicada_a_bncc-em-daniel-jelin-final.pdf ?sequence=1: :text=Este%20trabalho%20investiga%20oportunidades% 20para,professores %20em%20sala%20de%20aula. Acessado em: 26/12/2022.

LEIVAS, José Carlos Pinto. LUTZ, Mauricio Ramos. Desafios com palitos: uma proposta lúdica para o ensino de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. Revista Ciências Ideias, vol. 10, Nº 01, p.103 – 117. Janeiro/Abril 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/332666457_DESAFIOS_COM_PALITOS_UMA_PROPOSTA_LUDICA_PARA_O_ENSINO_DE_GEOMETRIA_NOS_ANOS _INICIAS_DO_ENSINO_ FUNDAMENTAL/link/5cc277454585156cd7b18e6b/download

LIMA, L. F. Grupo de estudos de professores e a produção de atividades matemáticas sobre funções utilizando computadores. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Unesp, Rio Claro, 2009.

MENDONÇA, Tiago das Neves. Que Geometria ensinar às crianças em tempos de Matemática Moderna?: Referências e Práticas de uma Professora da cidade de Juíz de Fora. Dissertação (Mestra Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora – MG. 2016. 130 fls. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/Disserta%C3%A7%C3 %A3o-Thiago-Neves-Final-CD.pdf

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. História da Matemática: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Coleção Tendências em Educação Matemática.

MIORIM, Maria Ângela. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual 1998.

MOL, Rogério Santos. Introdução a História da Matemática. Belo Horizonte: CAED – UFMG. 2013.

ROQUE, Tatiana. PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos da História da Matemática. Coleção Profmat. SBM: Sociedade Brasileira de Matemática. 1º Edição. 2012.

SANTOS. Marcelo C. Um exemplo de situação – problema: O Problema do Bilhar. RPM – Revista do Professor de Matemática. Vol. 50. SBM. 2002. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/50/7.htm. Acessado em: 20/09/2022.

SILVA, Maria Cecília Leme. O Movimento da Matemática Moderna e a geometria nas séries iniciais. XXIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 26-30/07/2011. Recife – Pernambuco – Brasil.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Revista Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, nº 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: Acesso em: 22de dez. de 2022.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetike, Campinas, SP, v. 1, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v1i1.8646822. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822 Acesso em: 30 jun. 2022.

PEREZ, Carlos Martinez. Fundamentos da Geometria Hiperbólica. Dissertação de Mestrado – Profmat. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro – SP. 2015

PONTE, João Pedro da. BROCARDO, Joana. OLIVERIA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. 3ª ed.(Revista e ampliada). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013

PONTES, E. A. S. Método de Polya para a resolução de problemas matemáticos: Uma Proposta Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

PIAGET, Jean. Para onde vai a educação? Rio de Janeiro: Livraria José Olympio, 1973.

POLYA, George. Como resolver problemas – Um aspecto novo do método matemático (Trad.). Lisboa: Gradiva, 2003. (Obra original publicada em 1945).

SHIO. Rúbia B. Amaral. Práticas para o ensino da Matemática – Cenários para Investigação. Youtube, 05/03/2021. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=CCFCPdtep-0>. Acessado em 23/03/2022.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra. Revista Educativa. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012. Disponível em: http://tede2.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/2491/1549. Acessado em 27/12/2022.

WALLE, John A. Van de. Matemática no ensino fundamental: Formação de professores em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.