



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

**CÁLCULO APROXIMADO DO POTENCIAL ELETROSTÁTICO DE
UM DISCO CIRCULAR E UM DISCO ELÍPTICO, COM
DISTRIBUIÇÃO DE CARGA HOMOGÊNEA, UTILIZANDO
MATEMÁTICA ELEMENTAR**

GUSTAVO MACIEL DOS SANTOS

MACAPÁ

2026

GUSTAVO MACIEL DOS SANTOS

**CÁLCULO APROXIMADO DO POTENCIAL ELETROSTÁTICO DE
UM DISCO CIRCULAR E UM DISCO ELÍPTICO, COM
DISTRIBUIÇÃO DE CARGA HOMOGÊNEA, UTILIZANDO
MATEMÁTICA ELEMENTAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Colegiado do Curso de Licenciatura em Física da
Universidade Federal do Amapá como requisito
parcial para a obtenção do título de Licenciado em
Física.

Orientador: YONY WALTER MILLA GONZA-
LES

MACAPÁ

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB-2 / 1569

S237c Santos, Gustavo Maciel dos.

Cálculo aproximado do potencial eletrostático de um disco circular e um disco elíptico, com distribuição de carga homogênea, utilizando matemática elementar. / Gustavo Maciel dos Santos. - Macapá, 2026.

1 recurso eletrônico.

43 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Física) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2026.

Orientador: Yony Walter Milla Gonzales.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Potencial eletrostático. 2. Matemática elementar. 3. Discretização geométrica. I. Gonzales, Yony Walter Milla, orientador. II. Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD 23. ed. – 510.7

SANTOS, Gustavo Maciel dos. **Cálculo aproximado do potencial eletrostático de um disco circular e um disco elíptico, com distribuição de carga homogênea, utilizando matemática elementar.** Orientador: Yony Walter Milla Gonzales. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Física. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2026.

GUSTAVO MACIEL DOS SANTOS

**CÁLCULO APROXIMADO DO POTENCIAL ELETROSTÁTICO DE
UM DISCO CIRCULAR E UM DISCO ELÍPTICO, COM
DISTRIBUIÇÃO DE CARGA HOMOGÊNEA, UTILIZANDO
MATEMÁTICA ELEMENTAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Colegiado do Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Amapá como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de Concentração: Eletromagnetismo.

Aprovada em 21 de julho de 2026.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Yony Walter Milla Gonzales
Orientador–Física/UNIFAP

Prof. Dr. David Antonio Sbrissa Neto
Membro da Banca–Física/UNIFAP

Prof. Dr. Jackeline Del Rosarios Collave Garcia
Membro da Banca–Física/UNIFAP

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a mim mesmo, por não ter desistido diante das dificuldades encontradas ao longo dessa caminhada. Cada obstáculo enfrentado, cada noite de estudo e cada momento de incerteza contribuíram para o meu crescimento pessoal e acadêmico. Chegar até aqui exigiu perseverança, dedicação e confiança de que todo esforço valeria a pena.

Agradeço a Deus, por me conceder força, sabedoria e serenidade nos momentos em que mais precisei, guiando meus passos e permitindo que eu alcançasse esta importante etapa da minha vida.

À minha mãe e à minha avó, expresso minha mais profunda gratidão por todo o amor, apoio, incentivo e pelos inúmeros sacrifícios realizados para que eu pudesse seguir meus sonhos. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Ao meu irmão, agradeço pela companhia, pelo apoio e pelos momentos compartilhados durante essa jornada, que tornaram o caminho mais leve.

Por fim, agradeço ao Botafogo de Futebol e Regatas, que, entre uma vitória, um empate e até algumas derrotas, proporcionou momentos de alegria, esperança e descontração ao longo dessa caminhada, lembrando-me da importância de também celebrar os pequenos momentos da vida.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo o meu sincero agradecimento.

RESUMO

Este trabalho propõe uma metodologia aproximada para a determinação do potencial eletrostático gerado por discos circulares e elípticos uniformemente carregados utilizando exclusivamente ferramentas da matemática elementar. Em contraste com a abordagem clássica, baseada no cálculo diferencial e integral, o método fundamenta-se na discretização geométrica da distribuição superficial de carga em anéis sucessivos, no emprego de somatórios finitos e em simplificações algébricas.

Inicialmente, a metodologia é desenvolvida para o disco circular, demonstrando-se sua convergência para a solução clássica do potencial eletrostático. Em seguida, o procedimento é generalizado para discos elípticos por meio de uma parametrização adequada da geometria, permitindo obter expressões aproximadas que incorporam os efeitos da excentricidade. Os resultados mostram excelente concordância com o comportamento físico esperado, indicando que as correções devidas à excentricidade surgem como termos de segunda ordem em relação ao caso circular.

Além de reproduzir satisfatoriamente as soluções conhecidas, a metodologia evidencia que problemas tradicionalmente tratados por integrais podem ser resolvidos por meio de procedimentos discretos sistemáticos, preservando a consistência matemática e física. Dessa forma, o método constitui uma alternativa para o estudo da eletrostática e um recurso didático para o ensino de distribuições contínuas de carga com ferramentas matemáticas elementares.

Palavras-chave: Potencial eletrostático; disco circular; disco elíptico; discretização geométrica; somatórios finitos; matemática elementar.

ABSTRACT

This work proposes an approximate methodology for determining the electrostatic potential generated by uniformly charged circular and elliptical disks using exclusively elementary mathematical tools. In contrast to the classical approach, which is based on differential and integral calculus, the proposed method relies on the geometric discretization of the surface charge distribution into successive rings, the use of finite summations, and algebraic simplification techniques.

Initially, the methodology is developed for a uniformly charged circular disk, demonstrating its convergence to the classical solution for the electrostatic potential. The procedure is then generalized to elliptical disks through an appropriate parametrization of the geometry, allowing the derivation of approximate expressions that incorporate the effects of eccentricity. The results show excellent agreement with the expected physical behavior, indicating that the corrections due to eccentricity appear as second-order terms relative to the circular case.

In addition to reproducing the known solutions with good accuracy, the proposed methodology demonstrates that problems traditionally solved using integral calculus can be treated through systematic discrete procedures while preserving mathematical consistency and physical interpretation. Therefore, the method provides an alternative approach to the study of electrostatics and a valuable educational resource for teaching continuous charge distributions using elementary mathematical tools.

Keywords: Electrostatic potential; circular disk; elliptical disk; geometric discretization; finite summations; elementary mathematics.

Lista de Figuras

1	Partição do disco circular em anéis concêntricos.	18
2	Disco elíptico particionado em anéis infinitesimais.	23
3	Análise geométrica do disco elíptico.	24

Sumário

1	Introdução	8
2	Objetivos	10
2.1	Geral	10
2.2	Específicos	10
3	Referencial Teórico	11
3.1	Fundamentos do Potencial Eletrostático	11
3.2	Potencial Eletrostático de Um Disco Circular Uniformemente Carregado	11
3.3	Somas Telescópicas	12
3.4	Transformações Lineares de Coordenadas	13
3.4.1	Parametrização da Geometria Elíptica por Transformação Linear	14
4	Metodologia	17
4.1	Discretização do Disco em Anéis Concêntricos	17
4.1.1	Expansão da Soma Telescópica	20
4.2	Potencial Eletroestático Aproximada Para o Disco Elíptico	23
4.2.1	Discretização do Disco Elíptico por Partições	24
4.2.2	Soma telescópica para a elipse	31
5	Resultados e Discussão	35
5.1	Validação Para o Disco Circular	35
5.2	Generalização para o Disco Elíptico	36
5.3	Análise comparativa	38
5.4	Aplicações didáticas da metodologia proposta	38
6	Conclusão	41
	Referências	42

1 Introdução

O eletromagnetismo constitui uma das áreas fundamentais da Física, sendo responsável pela descrição de fenômenos relacionados às interações elétricas e magnéticas presentes na natureza. Seu desenvolvimento ao longo dos séculos possibilitou avanços científicos e tecnológicos que transformaram a sociedade moderna, estando presente em aplicações que vão desde sistemas de geração e transmissão de energia elétrica até dispositivos eletrônicos, telecomunicações, equipamentos médicos e tecnologias de sensoriamento. Dessa forma, a compreensão dos fenômenos eletromagnéticos desempenha papel essencial tanto na formação de físicos quanto na preparação de profissionais das áreas científicas e tecnológicas.

Dentro desse contexto, a eletrostática ocupa posição de destaque por estudar sistemas de cargas elétricas em equilíbrio. Entre os diversos conceitos utilizados nessa área, o potencial eletrostático apresenta especial relevância por constituir uma grandeza escalar associada à energia potencial elétrica por unidade de carga. Sua utilização frequentemente simplifica a análise de sistemas físicos quando comparada à abordagem baseada diretamente no campo elétrico, permitindo descrever a influência de distribuições de carga por meio de funções matemáticas de interpretação física direta.

O cálculo do potencial eletrostático torna-se particularmente interessante quando se consideram distribuições contínuas de carga. Diferentemente do caso de cargas pontuais, para as quais as expressões matemáticas são relativamente simples, distribuições superficiais ou volumétricas exigem procedimentos de integração que podem se tornar consideravelmente mais complexos dependendo da geometria envolvida. Entre os exemplos clássicos estudados na literatura encontram-se os discos uniformemente carregados, cuja análise possui relevância tanto do ponto de vista teórico quanto em aplicações relacionadas à modelagem de capacitores, sensores capacitivos e superfícies eletricamente carregadas.

Tradicionalmente, a determinação do potencial eletrostático produzido por distribuições contínuas de carga é realizada por meio do cálculo diferencial e integral. Embora essa abordagem seja matematicamente rigorosa e amplamente consolidada, ela pode representar uma dificuldade para estudantes que ainda não possuem familiaridade com essas ferramentas. Entretanto, como as integrais podem ser interpretadas como o limite de somatórios associados a processos de discretização, torna-se possível desenvolver abordagens alternativas capazes de reproduzir resultados físicos relevantes utilizando apenas ferramentas matemáticas elementares. Nesse

contexto, discretizações geométricas, somas de Riemann e somatórios telescópicos constituem estratégias capazes de aproximar a formulação contínua sem recorrer diretamente ao cálculo integral.

Além do estudo do disco circular, torna-se igualmente interessante investigar distribuições de carga associadas a geometrias menos simétricas. Entre elas destaca-se o disco elíptico, cuja descrição envolve dois semieixos distintos e permite analisar como a excentricidade influencia o potencial eletrostático ao longo do eixo de simetria. A investigação desse problema amplia a compreensão da influência da geometria sobre sistemas eletrostáticos e estabelece uma conexão natural entre o caso circular e sua generalização elíptica.

Diferentemente da formulação tradicional, baseada diretamente no cálculo diferencial e integral, a metodologia proposta neste trabalho utiliza discretizações geométricas, somatórios finitos e propriedades algébricas para reconstruir a expressão do potencial eletrostático. Essa abordagem procura preservar a interpretação física do problema ao mesmo tempo em que reduz a complexidade matemática envolvida, permitindo uma generalização natural do disco circular para o disco elíptico. Dessa forma, o presente trabalho propõe uma abordagem baseada em discretização geométrica para o cálculo aproximado do potencial eletrostático gerado por discos circulares e elípticos uniformemente carregados. Inicialmente, desenvolve-se uma formulação para o caso circular utilizando somatórios finitos e estruturas telescópicas capazes de reproduzir resultados conhecidos da literatura. Em seguida, a metodologia é generalizada para a geometria elíptica por meio da introdução de coordenadas apropriadas e da análise das correções associadas à excentricidade da distribuição.

Além da contribuição matemática e física associada ao problema estudado, busca-se oferecer uma alternativa didática para a apresentação de conceitos tradicionalmente introduzidos por meio do cálculo integral. Espera-se que a metodologia desenvolvida funcione como uma ferramenta complementar no ensino da eletrostática, favorecendo uma compreensão mais intuitiva da construção do potencial eletrostático e da relação entre discretizações, somatórios e integrais.

Para o caso particular de um disco circular uniformemente carregado, essa formulação conduz à conhecida expressão analítica para o potencial ao longo do eixo de simetria, apresentada e discutida no Capítulo 4. O presente trabalho investiga uma forma alternativa de obter esse mesmo resultado utilizando exclusivamente ferramentas de matemática elementar, estendendo posteriormente essa metodologia ao caso de um disco elíptico.

2 Objetivos

2.1 Geral

Utilizar a matemática elementar para calcular o potencial eletroestático de um disco circular e elíptico a partir de aproximação matemática.

2.2 Específicos

- Obter base teórica do ensino do potencial eletroestático dentro da graduação;
- Compreender matematicamente a física por trás do estudo do potencial eletroestático;
- Obter a equação do potencial eletroestático para um disco circular, utilizando a matemática elementar, sem o uso de cálculo diferencial e integral;
- Aproximar a partir da equação do potencial eletroestático para um disco circular a equação para um disco elíptico.

3 Referencial Teórico

3.1 Fundamentos do Potencial Eletrostático

O potencial eletrostático é uma grandeza escalar que representa a energia potencial por unidade de carga em um campo elétrico. O potencial V devido a uma distribuição contínua de carga é obtido pela integração da lei de Coulomb, sendo:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' \quad (1)$$

onde $\sigma(\mathbf{r}')$ é a densidade superficial de carga e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ representa a distância entre o ponto de observação e o elemento de carga (GRIFFITHS, 2011).

Sabe-se que o potencial é uma ferramenta conceitualmente poderosa, pois permite deduzir o campo elétrico a partir do gradiente negativo do potencial (NUSSENZVEIG, 2015). Assim, o estudo do potencial oferece uma compreensão mais profunda das relações entre energia, campo e simetria em sistemas eletrostáticos.

3.2 Potencial Eletrostático de Um Disco Circular Uniformemente Carregado

O cálculo do potencial gerado por um disco circular uniformemente carregado é um problema clássico da eletrostática. A simetria axial desse sistema permite utilizar sem problemas o cálculo integral, resultando numa expressão exata para o potencial ao longo do eixo de simetria, sendo:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \quad (2)$$

em que R é o raio do disco e z a distância do ponto considerado ao plano do disco (GRIFFITHS, 2011). O estudo do disco circular é uma etapa fundamental para a introdução dos conceitos de campo e potencial em contextos didáticos.

Esse resultado é amplamente conhecido nos livros universitários de física geral 3, no entanto nós podemos chegar a esse mesmo resultado utilizando o método de discretização em N-anéis, aplicando a somatória e suas propriedades, sem recorrer ao cálculo integral. Mostramos esse método a continuação.

3.3 Somas Telescópicas

As somas telescópicas constituem uma classe especial de somatórios finitos caracterizados pelo cancelamento sucessivo de termos intermediários, restando apenas contribuições associadas aos extremos da soma, este tipo de estrutura ocorre quando os termos do somatório podem ser escritos como diferenças entre valores consecutivos de uma função, as somas telescópicas possuem ampla aplicação em diferentes áreas da matemática e da física, destacando-se principalmente por simplificar somatórios finitos, demonstrar o estudo de séries numéricas, aproximar integrais por somas discretas e demonstrar o uso de métodos algébricos em física teórica (RIFO, 2014).

Exemplo

Calcule:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{9900}$$

Se observarmos bem, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} &= \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ \frac{1}{9900} &= \frac{1}{99 \times 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Obtendo assim o padrão:

$$S = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad (3)$$

Aplicando o somatório:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)$$

Os termos intermediários se cancelam, restando:

$$S = 1 - \frac{1}{N+1} \quad (4)$$

Se $N = 99$, teremos que:

$$S = 1 - \frac{1}{99+1} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \quad (5)$$

Esse exemplo evidencia como uma soma aparentemente complexa pode ser reduzida a uma expressão simples por meio da estrutura telescópica.

3.4 Transformações Lineares de Coordenadas

Em muitos problemas da física matemática, especialmente em eletrostática, é conveniente reescrever as equações em sistemas de coordenadas que reflitam a simetria do problema. As transformações de coordenadas permitem simplificar a expressão das distâncias e áreas, tornando viável a solução analítica ou aproximada de integrais e somatórios (BOAS, 2006).

No caso de um disco circular, a simetria radial sugere o uso de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde cada elemento de área é dado por $dA = r dr d\theta$. Já para o disco elíptico, a geometria é melhor descrita em coordenadas elípticas, que podem ser definidas a partir de transformações lineares entre os eixos x e y , conforme:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{com } a > b, \quad (6)$$

onde a e b são os semi-eixos da elipse.

Tais transformações não apenas modificam as variáveis, mas também o elemento diferencial de área, o que deve ser levado em conta no cálculo de integrais ou somatórios que representam o potencial elétrico (STEWART, 2016). Assim, em vez de um raio constante r , a distância ao ponto de observação é reescrita em termos de funções que dependem de a , b e do ângulo θ .

A compreensão dessas mudanças de variáveis é fundamental para a generalização do modelo circular ao elíptico, pois permite descrever corretamente a distribuição de carga e a geometria dos anéis homotéticos usados na discretização.

3.4.1 Parametrização da Geometria Elíptica por Transformação Linear

Em diversos problemas da Física Matemática, a escolha adequada do sistema de coordenadas desempenha papel fundamental na simplificação do tratamento matemático de uma determinada geometria. No estudo do potencial eletrostático de distribuições contínuas de carga, é conveniente utilizar sistemas de coordenadas que respeitem a simetria do problema, permitindo representar a geometria da distribuição de forma mais natural (BOAS, 2006).

No caso do disco circular, a simetria radial permite descrever cada ponto através das coordenadas polares, uma vez que essa geometria apresenta simetria em torno do eixo de rotação. Essa escolha simplifica significativamente a descrição da distribuição de carga e do cálculo do potencial eletrostático (GRIFFITHS, 2011).

De x e y , temos:

$$x = r \cos \theta; \quad (7)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (8)$$

onde r representa a distância ao centro do disco e θ o ângulo polar.

Como o disco possui raio máximo R , é conveniente introduzir uma coordenada radial adimensional,

$$r = R\rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (9)$$

Dessa forma, as coordenadas do disco circular passam a ser escritas como:

$$x = R\rho \cos \theta; \quad (10)$$

$$y = R\rho \sin \theta. \quad (11)$$

Essa parametrização descreve todo o interior do disco, sendo que $\rho = 1$ corresponde à sua borda e valores menores representam circunferências concêntricas internas.

Para generalizar o problema para uma geometria elíptica, realiza-se uma transformação linear independente sobre cada eixo cartesiano. Transformações desse tipo são amplamente utilizadas para adaptar sistemas de coordenadas à geometria do problema, preservando sua estrutura matemática e simplificando o desenvolvimento analítico (BOAS, 2006).

Essa transformação consiste em escalonar o eixo x pelo semi-eixo maior a e o eixo y

pelo semi-eixo menor b , preservando a orientação angular da distribuição.

Matematicamente, essa transformação pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

da qual resulta diretamente a parametrização

$$x = a\rho \cos \theta; \quad (13)$$

$$y = b\rho \sin \theta. \quad (14)$$

Observa-se que essa transformação preserva a estrutura radial do problema, deformando apenas as escalas dos eixos coordenados.

Dessa maneira, cada circunferência do disco circular é transformada em uma elipse semelhante, formando uma sequência de anéis elípticos homotéticos.

Substituindo essas expressões na equação geral da elipse, obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \rho^2 \sin^2 \theta}{b^2}, \quad (15)$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta). \quad (16)$$

Utilizando a identidade trigonométrica,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (17)$$

segue que,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2. \quad (18)$$

Assim, quando:

$$\rho = 1, \quad (19)$$

obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (20)$$

que representa exatamente a fronteira da elipse.

Por outro lado, para

$$0 < \rho < 1, \quad (21)$$

obtêm-se elipses semelhantes e concêntricas à elipse externa, permitindo dividir toda a distribuição de carga em sucessivos anéis elípticos homotéticos.

Essa parametrização será utilizada na metodologia desenvolvida neste trabalho para descrever a posição de cada elemento de carga da distribuição elíptica. A partir dessas coordenadas será possível determinar o vetor posição, calcular a distância entre cada elemento de carga e o ponto de observação sobre o eixo de simetria e construir a formulação discreta utilizada para a obtenção do potencial eletrostático.

Transformações de coordenadas constituem uma ferramenta matemática importante para adaptar a descrição analítica às simetrias geométricas de um problema, simplificando expressões algébricas e permitindo mudanças de variáveis convenientes (STEWART, 2016; BOAS, 2006).

4 Metodologia

A metodologia desenvolvida neste trabalho consiste na construção de um modelo discreto para a determinação aproximada do potencial eletrostático produzido por distribuições superficiais de carga. Diferentemente da abordagem clássica, baseada na integração contínua da Lei de Coulomb, propõe-se a discretização geométrica da superfície carregada em um conjunto finito de elementos, permitindo substituir integrais por somatórios finitos. A estratégia é inicialmente aplicada ao disco circular e posteriormente estendida ao disco elíptico mediante uma transformação linear das coordenadas e a utilização de anéis elípticos homotéticos. O procedimento matemático fundamenta-se na combinação de discretização geométrica, aproximações assintóticas, expansões em série de Taylor e reorganização algébrica dos somatórios em estruturas telescópicas.

4.1 Discretização do Disco em Anéis Concêntricos

Seja um disco circular de raio R e densidade superficial de carga σ dada por:

$$X^2 + Y^2 = R^2. \quad (22)$$

Queremos calcular o potencial eletrostático gerado por ele ao longo do eixo de simetria Z , para isso fazemos a partição em anéis de cargas como se mostra na figura 1. A escolha de anéis concêntricos decorre da simetria axial do problema. Cada anel possui todos os seus elementos de carga à mesma distância radial do eixo de simetria, permitindo que sua contribuição para o potencial seja tratada de forma uniforme e reduzindo significativamente a complexidade algébrica do desenvolvimento.

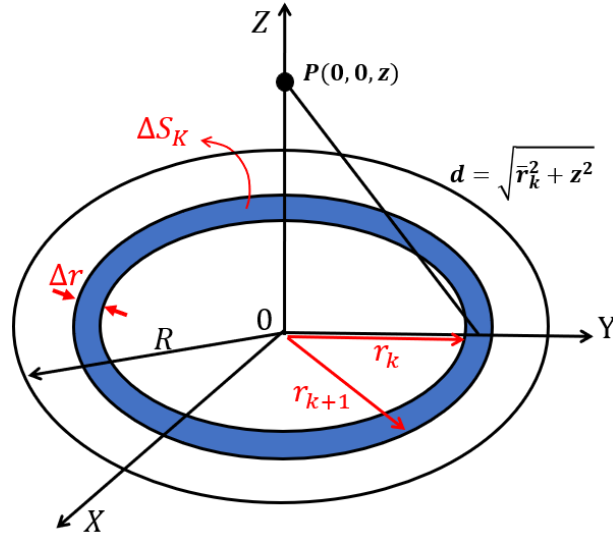


Figura 1: Partição do disco circular em anéis concêntricos.

Dividimos o disco em N -anéis circulares concêntricos, cada um com largura:

$$\Delta r = \frac{R}{N}, \quad r_k = k\Delta r, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Com o raio médio sendo:

$$\bar{r}_k = r_k + \frac{\Delta r}{2}. \quad (23)$$

Logo, a carga associada a cada anel será:

$$\Delta q_k = \sigma \Delta S_k = \sigma 2\pi r \Delta r. \quad (24)$$

Assim, o potencial eletroestático do k -ésimo anel sobre o eixo Z será:

$$\Delta V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi \bar{r}_k \Delta r}{\sqrt{z^2 + \bar{r}_k^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\bar{r}_k \Delta r}{\sqrt{z^2 + \bar{r}_k^2}}. \quad (25)$$

Logo o potencial em $(0, 0, z)$ será a soma de cada elemento de carga das partições em anéis, o que se pode escrever como uma soma finita:

$$V_N(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\bar{r}_k \Delta r}{\sqrt{z^2 + \bar{r}_k^2}}. \quad (26)$$

Como pode-se considerar Δr muito pequeno quando N é grande, então podemos transformar

essa somatória numa soma telescópica a partir de cada termo da somatória da seguinte maneira.

Como $\bar{r}_{k+1} = \bar{r}_k + \Delta r$, podemos considerar a seguinte função:

$$f(r) = \sqrt{z^2 + r^2}. \quad (27)$$

Podemos calcular exatamente a diferença entre dois termos consecutivos:

$$f(r_{k+1}) - f(r_k) = \sqrt{z^2 + (r_k + \Delta r)^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2}. \quad (28)$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado no lado direito da equação:

$$f(r_{k+1}) - f(r_k) = \frac{(z^2 + (r_k + \Delta r)^2) - (z^2 + r_k^2)}{\sqrt{z^2 + (r_k + \Delta r)^2} + \sqrt{z^2 + r_k^2}} = \frac{2r_k \Delta r + (\Delta r)^2}{\sqrt{z^2 + (r_k + \Delta r)^2} + \sqrt{z^2 + r_k^2}}. \quad (29)$$

Como $\Delta r \ll r_k$ (partição fina), então, temos que no numerador:

$$2r_k \Delta r + (\Delta r)^2 \approx 2r_k \Delta r. \quad (30)$$

E no denominador:

$$\sqrt{z^2 + (r_k + \Delta r)^2} + \sqrt{z^2 + r_k^2} \approx 2\sqrt{z^2 + r_k^2}. \quad (31)$$

Assim, essa diferença da função entre os termos consecutivos resulta, com bastante aproximação:

$$f(r_{k+1}) - f(r_k) = \sqrt{z^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2} \approx \frac{r_k \Delta r}{\sqrt{z^2 + r_k^2}}. \quad (32)$$

E voltando ao potencial, temos agora que:

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{z^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2} \right]. \quad (33)$$

O que representa uma soma telescópica, isto é, os termos intermediários da somatória são cancelados, ficando só os termos extremos. Podemos mostrar isso na seguinte seção.

4.1.1 Expansão da Soma Telescópica

Considere o somatório:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{z^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2} \right]. \quad (34)$$

Para compreender sua estrutura, expandimos explicitamente os termos de k , para $k = 0$:

$$\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 + r_0^2}$$

Para $k = 1$

$$\sqrt{z^2 + r_2^2} - \sqrt{z^2 + r^2}$$

Para $k = 2$:

$$\sqrt{z^2 + r_3^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2}$$

Para $k = 3$:

$$\sqrt{z^2 + r_3^2} - \sqrt{z^2 + r_3^2}$$

$\vdots$

Para $k = N - 1$:

$$\sqrt{z^2 + r_N^2} - \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2}$$

Somando todos os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 + r_0^2} \right] + \left[\sqrt{z^2 + r_2^2} - \sqrt{z^2 + r^2} \right] + \\ & + \left[\sqrt{z^2 + r_3^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} \right] + \left[\sqrt{z^2 + r_3^2} - \sqrt{z^2 + r_3^2} \right] + \\ & + \cdots + \left[\sqrt{z^2 + r_N^2} - \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2} \right]. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{z^2 + r_0^2} + \sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 + r^2} + \sqrt{z^2 + r_2^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} + \\ & + \cdots + \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2} - \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2} + \sqrt{z^2 + r_N^2} \end{aligned}$$

Observa-se que ocorre cancelamento entre termos consecutivos, pois:

$$\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 + r^2}, \sqrt{z^2 + r_2^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2}, \dots, \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2} - \sqrt{z^2 + r_{N-1}^2}.$$

Assim, restam apenas os termos extremos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{z^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2} \right] = -\sqrt{z^2 + r_0^2} + \sqrt{z^2 + r_N^2}.$$

Organizando:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{z^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + r_k^2} \right] = \sqrt{z^2 + r_N^2} - \sqrt{z^2 + r_0^2}.$$

Esse resultado caracteriza uma soma telescópica, na qual os termos intermediários se cancelam, simplificando significativamente o somatório.

Para o potencial, obtemos então:

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + r_N^2} - \sqrt{z^2 + r_0^2} \right]. \quad (35)$$

Lembrando que nas partições do disco em anéis, $r_0 = 0$ e $r_N = R$, com isso o resultado é:

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2} \right], \quad (36)$$

Ou,

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right]. \quad (37)$$

Onde (37) é o mesmo valor para o potencial obtido pelo cálculo integral. Diferentemente da abordagem contínua, o método discreto introduz certos erros que podem impactar o resultado a depender das condições adotadas, tais como a largura Δr do anel e a distância Z analisada, por

isso, o valor obtido é aproximado.

Este método, e possivelmente outros que não envolvem cálculo integral, somente matemática elementar como teoria dos números, séries, aproximações, etc..., podem ser implementados no ensino médio, sobre tudo para torneios de Olimpíadas de Física, onde métodos de soluções deste tipo de problemas devem ser implementados sem o cálculo integral.

Dentro do trabalho, as somas telescópicas surgem naturalmente ao se discretizar o disco circular em anéis concêntricos. O potencial eletrostático, inicialmente expresso como um somatório das contribuições de cada anel, pode ser reescrito como uma soma de diferenças sucessivas de uma função adequada.

Essa reinterpretação permite transformar um somatório aparentemente complexo em uma expressão simples dependente apenas dos limites da partição. No limite em que o número de anéis tende ao infinito, o resultado obtido coincide com aquele derivado pelo cálculo integral, evidenciando a consistência da abordagem discreta adotada.

Dessa forma, o uso de somas telescópicas não apenas simplifica o tratamento matemático do problema, mas também reforça a interpretação física do potencial como resultado da superposição de contribuições elementares.

4.2 Potencial Eletroestático Aproximada Para o Disco Elíptico

Observa-se primeiramente o comportamento do disco circular para depois fazer a generalização para o disco elíptico, onde aproxima-se.

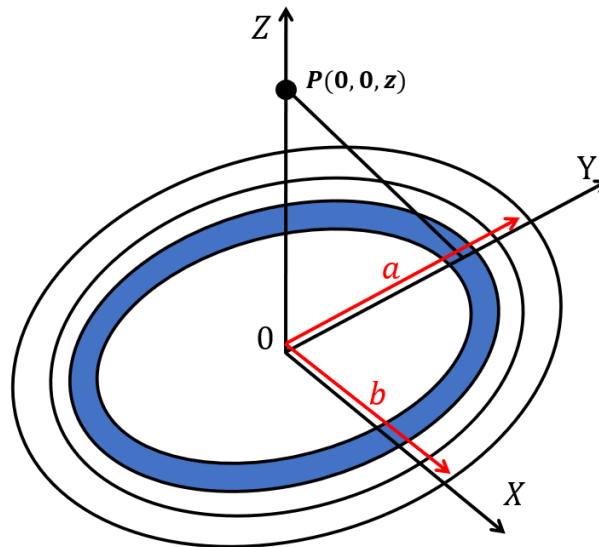


Figura 2: Disco elíptico particionado em anéis infinitesimais.

Quando o disco circular é substituído por um disco elíptico, a simetria do sistema é reduzida, e as integrais envolvidas tornam-se mais complexas. No entanto, é possível aproximar o comportamento do potencial de um disco elíptico por meio de discretizações geométricas (BOAS, 2006), dividindo a elipse em anéis homotéticos e aplicando argumentos puramente algébricos.

Essa técnica permite obter resultados satisfatórios sem recorrer ao cálculo integral, utilizando apenas ferramentas de matemática elementar, como somatórios e expansões binomiais. Esta abordagem é coerente com os métodos de aproximação (BOAS, 2006), que enfatiza o uso de séries e limites para representar sistemas contínuos.

Neste trabalho, o disco elíptico será tratado como uma sequência de anéis finitos com distribuição de carga homogênea, após aplicarmos a metodologia do trabalho, espera-se obter resultados aproximados satisfatórios. No final, será discutido o método aplicado no trabalho, com suas vantagens e compararemos com os resultados do método por integração, considerando a excentricidade da elipse e a posição ao longo do eixo Z onde é avaliado o potencial eletrostático.

4.2.1 Discretização do Disco Elíptico por Partições

Da geometria elíptica temos que analisar as contribuições angulares dadas por ρ_k e θ_j , juntamente com as contribuições para cada anel assim como fizemos para o disco circular:

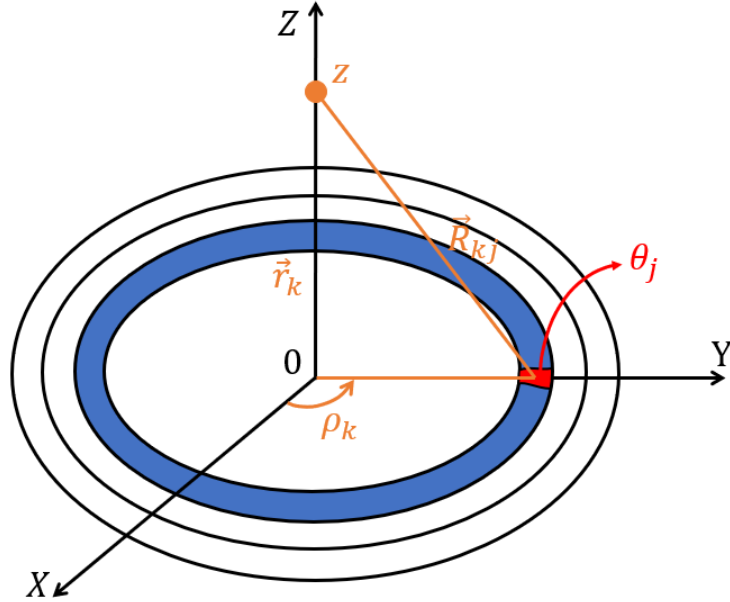


Figura 3: Análise geométrica do disco elíptico.

a partir dela, pode-se verificar algumas condições para podermos analisar o caso elíptico, onde,

$$\rho_k = \frac{k}{N} ; \rho \in [0, 1] ; \Delta\rho = \frac{1}{N}, \quad (38)$$

com ρ_k sendo a contribuição angular que varre a elipse, sendo $0 \leq \rho \leq 1$ e N sendo o número de anéis que formam nossa elipse.

Tiramos também, os termos:

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{M} ; \Delta\theta = \frac{2\pi}{M} ; \theta \in [0, 2\pi], \quad (39)$$

com θ_j sendo os termos angulares dos anéis, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e M corresponde ao número de cada pedaço particionado dos anéis.

Definimos então da nossa figura 3, que $\vec{R}_{k,j} = \vec{r} - \vec{r}'$, mas primeiramente, partiremos da parametrização:

$$x = a\rho\cos\theta ; y = b\rho\sin\theta. \quad (40)$$

A escolha dessa parametrização permite descrever toda a região interna da elipse através das variáveis adimensionais ρ e θ .

Quando $\rho = 1$, obtém-se a borda da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (41)$$

enquanto valores $0 \leq \rho < 1$ descrevem elipses semelhantes e concêntricas contidas no interior da região.

Dessa forma, a variável ρ desempenha papel análogo ao raio polar utilizado no caso circular, onde $\vec{r} = a\rho\cos\theta\hat{i} - b\rho\sin\theta\hat{j}$ e $\vec{r} = z\hat{k}$, assim, substituindo em $\vec{R}_{k,j}$, teremos:

$$\vec{R}_{k,j} = z\hat{k} - a\rho_k\cos\theta_k\hat{j} - b\rho_k\sin\theta_k\hat{j}. \quad (42)$$

Do modulo de $\vec{R}_{k,j}$, dado por:

$$|\vec{R}_{k,j}| = \sqrt{z^2 + a^2\rho_k^2\cos^2\theta_{kj} + b^2\rho_k^2\sin^2\theta_{kj}}, \quad (43)$$

e da equação para o potencial elétrico:

$$\Delta V_{kj} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_{kj}}{|\vec{R}_{kj}|}. \quad (44)$$

determinaremos as variáveis da equação, primeiramente para $\Delta q_{kj} = \sigma\Delta A_k$, com o valor de ΔA_k sendo:

$$\Delta A_k = ab\rho_k\Delta\rho\Delta\theta. \quad (45)$$

e, substituindo na equação para o elemento de carga, teremos então:

$$\Delta q_k = \sigma ab\rho_k\Delta\rho\Delta\theta. \quad (46)$$

Assim, o potencial procurado será dado por:

$$\Delta V_{kj} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ab\rho_k\Delta\rho\Delta\theta}{\sqrt{z^2 + a^2\rho_k^2\cos^2\theta_{kj} + b^2\rho_k^2\sin^2\theta_{kj}}}, \quad (47)$$

organizando,

$$\Delta V_{kj} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ab\rho_k \Delta\rho \Delta\theta}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2(a^2 \cos^2\theta_{kj} + b^2 \sin^2\theta_{kj})}}. \quad (48)$$

Logo, o potencial total em z será dado por:

$$V_z = \frac{ab\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\rho_k \Delta\rho \Delta\theta}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2(a^2 \cos^2\theta_{kj} + b^2 \sin^2\theta_{kj})}}. \quad (49)$$

A dependência angular presente no denominador pode ser simplificada utilizando identidades trigonométricas. Essa etapa é particularmente conveniente porque permitirá posteriormente calcular médias angulares e identificar quais termos contribuem efetivamente para o potencial.

De $a^2 \cos^2\theta_{kj} + b^2 \sin^2\theta_{kj}$, podemos reescrever os termos $\cos^2\theta_j$ e $\sin^2\theta_j$ como:

$$\cos^2\theta_j = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}; \quad (50)$$

$$\sin^2\theta_j = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad (51)$$

multiplicando o termo de cima a^2 e o de baixo por b^2 :

$$a^2 \cos^2\theta_j = \frac{a^2 + a^2 \cos 2\theta}{2}; \quad (52)$$

$$b^2 \sin^2\theta_j = \frac{b^2 - b^2 \cos 2\theta}{2}, \quad (53)$$

somando as equações:

$$a^2 \cos^2\theta_j + b^2 \sin^2\theta_j = \frac{a^2 + a^2 \cos 2\theta}{2} + \frac{b^2 - b^2 \cos 2\theta}{2}; \quad (54)$$

$$a^2 \cos^2\theta_j + b^2 \sin^2\theta_j = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2) \cos 2\theta_j}{2}. \quad (55)$$

Com o resultado obtido, substituindo em V_z :

$$V_z = \frac{ab\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\rho_k \Delta\rho \Delta\theta}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a^2-b^2) \cos 2\theta_j}{2} \right)}}. \quad (56)$$

Organizando:

$$V_z = \frac{ab\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\rho_k \Delta\rho \Delta\theta}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 \frac{a^2+b^2}{2} + \rho_k^2 \frac{(a^2+b^2)}{2} \cos^2\theta_j}} \quad (57)$$

e definindo:

$$A_k = z^2 + \rho_k \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right); \quad \delta = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad (58)$$

podemos ver que,

$$V_z = \frac{ab\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\rho_k \Delta\rho \Delta\theta}{\sqrt{z^2 + A_k + \rho_k^2 \delta \cos^2\theta_j}}, \quad (59)$$

com isso, trabalhando apenas com o somatório:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\sqrt{A_k + \rho_k^2 \delta \cos^2\theta_j}}, \quad (60)$$

como definimos anteriormente que $|\vec{R}_{k,j}| = \sqrt{z^2 + a^2 \rho_k^2 \cos^2\theta_{kj} + b^2 \rho_k^2 \sin^2\theta_{kj}}$, temos então que:

$$\frac{1}{|\vec{R}_{k,j}|} = \frac{1}{\sqrt{A_k + \rho_k^2 \delta \cos^2\theta_j}}, \quad (61)$$

simplificando o termo A_k :

$$\frac{1}{|\vec{R}_{k,j}|} = \frac{1}{\sqrt{A_k \left(1 + \frac{\rho_k^2 \delta \cos^2\theta_j}{A_k}\right)}}; \quad (62)$$

$$|\vec{R}_{k,j}| = \frac{1}{\sqrt{A_k} \sqrt{1 + \frac{\rho_k^2 \delta \cos^2\theta_j}{A_k}}}, \quad (63)$$

onde,

$$\epsilon_k = \frac{\rho_k^2 \delta}{A_k} < 1. \quad (64)$$

com ϵ_k sendo a excentricidade da nossa elipse.

Para valores moderados da excentricidade da elipse, o parâmetro ϵ_k permanece menor

que a unidade em todo o domínio de integração. Nessa situação, a função

$$(1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2}, \quad (65)$$

pode ser representada por sua série de Taylor em torno de $\epsilon_k = 0$. Tal aproximação permite separar explicitamente as contribuições angulares das contribuições radiais. O método abordado a partir desta análise utiliza as médias angulares dos anéis para lidar com a excentricidade da elipse (TREFETHEN; WEIDEMAN, 2014). Esse procedimento permite encontrar e isolar com mais eficácia o termo corretivo gerado nessa etapa.

Assim:

$$\frac{1}{|\vec{R}_{kj}|} = \frac{1}{\sqrt{A_k}} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j}}. \quad (66)$$

Da expansão de Taylor dada por:

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (67)$$

expandiremos então $\frac{1}{\vec{R}_{kj}}$ para seus valores médios, assim:

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{R}_{kj}|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{A_k}} \left\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \right\rangle, \quad (68)$$

de $\left\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \right\rangle$, tiramos:

$$\left\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \right\rangle = \left\langle 1 - \frac{1}{2}\epsilon_k \cos 2\theta_j + \frac{3}{8}(\epsilon_k \cos 2\theta_j)^2 - \frac{5}{16}(\epsilon_k \cos 2\theta_j)^3 + \dots \right\rangle, \quad (69)$$

para os valores médios da expansão:

$$\begin{aligned} \left\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \right\rangle &= \left\langle 1 \right\rangle - \frac{1}{2}\epsilon_k \left\langle \cos 2\theta_j \right\rangle + \frac{3}{8}\epsilon_k^2 \left\langle \cos^2 \theta_j \right\rangle + \\ &\quad - \frac{5}{16}\epsilon_k^2 \left\langle \cos^3 2\theta_j \right\rangle + \dots \end{aligned} \quad (70)$$

$$\left\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \right\rangle = 1 - 0 + \frac{3}{8}\epsilon_k^2 \frac{1}{2} + 0 - \dots \quad (71)$$

então,

$$\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \rangle \approx 1 + \frac{3}{16} \epsilon_k^2 \approx 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\rho_k^2 \delta^2}{A_k^2} \right), \quad (72)$$

de $\delta = \frac{a^2 - b^2}{2}$, obtemos finalmente:

$$\langle (1 + \epsilon_k \cos 2\theta_j)^{-1/2} \rangle \approx 1 + \frac{3}{16} \frac{\rho_k^4}{A_k^2} \frac{(a^2 - b^2)}{4}. \quad (73)$$

Observa-se que a primeira correção não nula aparece apenas na ordem quadrática em ϵ_k . Isso ocorre porque as contribuições lineares apresentam simetria angular e cancelam-se ao longo de uma volta completa na elipse. Assim, os efeitos da deformação elíptica surgem apenas como correções de segunda ordem em relação ao caso circular, logo:

$$\frac{1}{\langle R_{kj} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{A_k}} \left[1 + \frac{3}{64} \frac{\rho_k^4}{A_k^2} (a^2 - b^2) \right]. \quad (74)$$

Teremos então para o somatório:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta\theta}{\langle \frac{1}{R_{kj}} \rangle} ; \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{M}, \quad (75)$$

organizando e operando,

$$\frac{2\pi}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\langle R_{kj} \rangle} = \frac{2\pi}{M} \frac{M}{\langle R_{kj} \rangle} \quad (76)$$

$$\frac{2\pi}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\langle R_{kj} \rangle} = \frac{2\pi}{\langle R_{kj} \rangle}. \quad (77)$$

Logo, para o potencial total, teremos agora que:

$$V(z) = \frac{ab\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \rho_k \Delta\rho \frac{2\pi}{\langle R_{kj} \rangle}; \quad (78)$$

$$V(z) = \frac{ab\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta\rho}{\langle R_{kj} \rangle}. \quad (79)$$

Assim, chegando no resultado:

$$V(z) = \frac{ab\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{A_k}} \left(1 + \frac{3}{64} \rho_k^4 \frac{(a^2 - b^2)^2}{A_k^2} \right) \right]. \quad (80)$$

Com isso, (80) é a equação do potencial eletroestático obtida para a elipse, com a expressão $\left(1 + \frac{3}{64} \rho_k^4 \frac{(a^2 - b^2)^2}{A_k^2} \right)$ sendo o termo corretivo que irá surgir justamente pela expansão das medidas angulares da elipse.

Com essa parte definida, temos que para o caso onde $a = b = R$, a equação passará a ser:

$$V(z) = \frac{ab\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 \left(\frac{R^2 + R^2}{2} \right)}} \left(1 + \frac{3}{64} \rho_k^4 \frac{(R^2 - R^2)^2}{A_k^2} \right) \right]. \quad (81)$$

Pois nesse limite, a excentricidade da elipse desaparece e a geometria reduz-se exatamente a um disco circular de raio R e como consequência,

$$a^2 - b^2 = 0, \quad (82)$$

então,

$$V(z) = \frac{ab\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 \left(\frac{R^2 + R^2}{2} \right)}} \right] \times 1 \quad (83)$$

fazendo com que todos os termos corretivos provenientes da expansão angular desapareçam, e para o termo dentro da raiz:

$$\rho_k^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) = \rho_k^2 \left(\frac{2R^2}{2} \right) = \rho_k^2 R^2, \quad (84)$$

nos levando diretamente a equação:

$$V(z) = \frac{\sigma ab}{2\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 R^2}}. \quad (85)$$

Assim, o potencial reduz-se então à expressão já obtida para o disco circular uniformemente carregado, demonstrando a consistência do desenvolvimento realizado.

4.2.2 Soma telescópica para a elipse

Observa-se que o termo principal do potencial possui estrutura semelhante àquela obtida para o disco circular, com isso, definimos a função auxiliar,

$$f(\rho) = \sqrt{z^2 + R^2 \rho^2}. \quad (86)$$

Logo,

$$f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k) = \sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}. \quad (87)$$

Multiplicando pelo conjugado, obtemos:

$$f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k) = \frac{(z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2) - (z^2 + R^2 \rho_k^2)}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} + \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}}. \quad (88)$$

Simplificando o numerador,

$$f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k) = \frac{R^2(\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2)}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} + \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}}. \quad (89)$$

Como,

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \Delta\rho, \quad (90)$$

segue que,

$$\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2 = 2\rho_k \Delta\rho + (\Delta\rho)^2. \quad (91)$$

Substituindo $\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2$ em (89),

$$f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k) = \frac{R^2 (2\rho_k \Delta\rho + (\Delta\rho)^2)}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} + \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}}. \quad (92)$$

Para partições suficientemente finas, o termo $(\Delta\rho)^2$ torna-se desprezível em comparação

com $\rho_k \Delta \rho$, além disso,

$$\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} + \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2} \approx 2\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}. \quad (93)$$

Dessa forma,

$$f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k) \approx R^2 \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}}, \quad (94)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}} \approx \frac{1}{R^2} [f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k)]. \quad (95)$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}} \approx \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N [f(\rho_{k+1}) - f(\rho_k)]. \quad (96)$$

Substituindo novamente a definição de $f(\rho)$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}} \approx \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N \left[\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2} \right]. \quad (97)$$

Expandindo explicitamente os primeiros termos do somatório, obtemos

$$\frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N \left[\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2} \right] = \frac{1}{R^2} \left[\left(\sqrt{z^2 + R^2 \rho_2^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_1^2} \right) + \quad (98) \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{z^2 + R^2 \rho_3^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_2^2} \right) + \cdots + \left(\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{N+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_N^2} \right) \right], \quad (99)$$

observa-se que os termos intermediários cancelam-se sucessivamente, restando apenas os termos das extremidades.

Assim,

$$\frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N \left[\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{k+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2} \right] = \frac{1}{R^2} \left[\sqrt{z^2 + R^2 \rho_{N+1}^2} - \sqrt{z^2 + R^2 \rho_1^2} \right]. \quad (100)$$

No limite de partições cada vez mais refinadas, temos:

$$\rho_1 \rightarrow 0, \quad \rho_{N+1} \rightarrow 1 \quad (101)$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + R^2 \rho_k^2}} \approx \frac{1}{R^2} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right]. \quad (102)$$

Substituindo este resultado na expressão do potencial, obtemos então:

$$V(z) \approx \frac{\sigma ab}{2\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right], \quad (103)$$

onde R é o raio efetivo e os termos ab os raios da elipse.

Finalmente, se $a \approx b = R$ pode-se simplificar R^2 , com isso, obteremos o valor para o potencial da elipse, sendo:

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right], \quad (104)$$

ou,

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - z \right]. \quad (105)$$

A expressão obtida para o potencial eletrostático pode ser interpretada como a soma de uma contribuição principal, associada à geometria média da distribuição de carga, e de uma correção decorrente da excentricidade da elipse. Essa correção surge naturalmente da expansão em série do fator angular presente no denominador do potencial.

Do resultado que foi obtido para o potencial da elipse em (80),

$$V(z) = \frac{\sigma ab}{2\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \rho}{\sqrt{z^2 + \rho_k^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)}} \left[1 + \frac{3}{64} \frac{\rho_k^4 (a^2 - b^2)^2}{A_k^2} \right], \quad (106)$$

onde,

$$A_k = z^2 + \rho_k^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right), \quad (107)$$

Observa-se que o termo corretivo depende do fator,

$$(a^2 - b^2)^2, \quad (108)$$

o qual mede o afastamento da geometria elíptica em relação ao caso circular. Quanto mais próximos forem os semi-eixos a e b , menor será a contribuição dessa correção.

Em particular, para o caso circular,

$$a = b = R, \quad (109)$$

segue que,

$$(a^2 - b^2)^2 = 0, \quad (110)$$

fazendo com que todos os termos corretivos desapareçam identicamente. Dessa forma, recupera-se exatamente a expressão obtida para o disco circular uniformemente carregado.

Além disso, nota-se que a primeira contribuição não nula da deformação elíptica surge apenas em segunda ordem. Isso ocorre porque os termos lineares da expansão apresentam média angular nula ao longo de uma volta completa na elipse. Consequentemente, pequenas deformações da geometria circular produzem apenas pequenas alterações no potencial eletrostático ao longo do eixo de simetria.

Fisicamente, esse resultado indica que o potencial é relativamente pouco sensível a pequenas variações da forma geométrica da distribuição de carga. Assim, para elipses de baixa excentricidade, a expressão principal obtida por meio da soma telescópica fornece uma excelente aproximação para o potencial eletrostático, enquanto o termo corretivo representa um refinamento associado à perda da simetria circular.

5 Resultados e Discussão

5.1 Validação Para o Disco Circular

A validação da metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser realizada por meio da comparação entre o resultado obtido pela abordagem discreta e a solução clássica encontrada na literatura para o potencial eletrostático de um disco circular uniformemente carregado.

Partindo da expressão geral do potencial eletrostático para uma distribuição contínua de carga,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R}, \quad (111)$$

e considerando um disco circular de raio R e densidade superficial uniforme σ , a abordagem tradicional baseada em cálculo integral conduz ao resultado,

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right). \quad (112)$$

Por outro lado, a metodologia desenvolvida neste trabalho baseou-se na discretização geométrica do disco em anéis sucessivos, substituindo a integral contínua por um somatório finito. A partir dessa discretização foi possível construir uma estrutura telescópica que permitiu simplificar o somatório e obter a expressão,

$$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right). \quad (113)$$

Observa-se que o resultado obtido coincide com a solução clássica da literatura. Essa concordância demonstra que a discretização empregada preserva adequadamente a física do problema e reproduz corretamente o comportamento do potencial eletrostático ao longo do eixo de simetria do disco.

Embora ambas as abordagens conduzam ao mesmo resultado final, existem diferenças conceituais importantes entre elas. A solução integral parte diretamente da descrição contínua da distribuição de carga, exigindo ferramentas de cálculo diferencial e integral para sua resolução. Em contrapartida, o método desenvolvido neste trabalho utiliza apenas conceitos de geometria, álgebra e somatórios finitos, permitindo reconstruir o resultado conhecido sem recorrer explicitamente às técnicas tradicionais do cálculo.

Além disso, a abordagem discreta evidencia de forma mais intuitiva a contribuição individual de cada elemento da distribuição de carga para o potencial total. Enquanto a formulação integral descreve o sistema como um contínuo, a discretização permite interpretar fisicamente o potencial como a soma das contribuições produzidas por sucessivos anéis carregados.

Outro aspecto relevante é que o procedimento utilizado aproxima-se naturalmente do conceito de soma de Riemann. À medida que o número de divisões aumenta e $(\Delta\rho)$ tende a zero, o somatório converge para a integral correspondente, estabelecendo uma conexão direta entre a matemática elementar utilizada neste trabalho e a formulação contínua clássica.

Do ponto de vista pedagógico, essa característica apresenta particular interesse, pois possibilita introduzir conceitos avançados da eletrostática utilizando ferramentas matemáticas mais acessíveis para estudantes que ainda não tiveram contato formal com o cálculo diferencial e integral. Dessa forma, o método proposto não deve ser visto como um substituto da abordagem integral, mas como uma alternativa complementar capaz de fornecer uma compreensão mais intuitiva dos processos físicos e matemáticos envolvidos.

A equivalência entre os resultados obtidos pelas duas metodologias constitui, portanto, uma importante evidência da validade da abordagem desenvolvida, ao mesmo tempo em que reforça seu potencial como ferramenta didática para o ensino de eletrostática e modelagem matemática.

5.2 Generalização para o Disco Elíptico

Após a validação da metodologia proposta para o disco circular, procede-se à sua extensão para distribuições superficiais de carga com geometria elíptica. Essa generalização constitui a principal contribuição deste trabalho, uma vez que a perda da simetria circular torna a determinação do potencial eletrostático significativamente mais complexa quando comparada ao caso clássico.

No disco circular, a distância entre cada elemento de carga e o eixo de simetria depende apenas da coordenada radial, consequência direta da simetria rotacional da distribuição. No caso elíptico, entretanto, essa distância passa a depender simultaneamente das coordenadas radial e angular, fazendo com que a contribuição de cada elemento de carga varie ao longo da periferia da elipse.

Para contornar essa dificuldade, adotou-se uma parametrização obtida por meio de uma transformação linear das coordenadas cartesianas, na qual cada circunferência do disco circular

é deformada em uma elipse semelhante à fronteira da distribuição. Essa transformação preserva a estrutura geométrica da discretização, permitindo representar a superfície carregada por uma sequência de anéis elípticos homotéticos.

A discretização da distribuição superficial conduz novamente a um somatório das contribuições produzidas por cada anel. Entretanto, diferentemente do caso circular, surge uma dependência angular explícita no denominador da expressão do potencial. Essa dependência foi tratada mediante a utilização de identidades trigonométricas e posterior expansão em série de Taylor, válida para valores moderados da excentricidade.

A análise mostrou que os termos lineares associados à deformação da geometria apresentam média angular nula quando considerados ao longo de uma volta completa sobre a elipse. Em consequência, as primeiras correções efetivas aparecem apenas em segunda ordem na excentricidade.

Esse resultado possui interpretação física importante, indicando que pequenas deformações da geometria circular produzem apenas pequenas alterações no potencial eletrostático ao longo do eixo de simetria.

A expressão aproximada obtida para o potencial pode ser escrita na forma,

$$V_{elipse}(z) = v_{circular}(z) + \delta V(\epsilon), \quad (114)$$

ou seja, que o termo de correção nessa aproximação é calibrado pela excentricidade da distribuição, de tal forma que quando os semi-eixos da elipse $a = b$ o termo corretivo é cancelado. Esse comportamento demonstra que a generalização preserva corretamente o limite físico esperado, constituindo uma importante verificação da consistência matemática do método.

Além disso, observa-se que a metodologia discreta mantém sua estrutura original durante todo o processo de generalização. A discretização em anéis, o cálculo da contribuição individual de cada elemento e a reorganização do somatório por meio de estruturas telescópicas permanecem válidos mesmo após a deformação geométrica da distribuição. Essa característica evidencia que o procedimento desenvolvido não depende exclusivamente da elevada simetria do disco circular, podendo ser adaptado para geometrias mais gerais.

Do ponto de vista físico, os resultados indicam que o potencial eletrostático apresenta baixa sensibilidade a pequenas deformações da geometria da superfície carregada. Dessa forma, para elipses de pequena ou moderada excentricidade, a expressão aproximada obtida reproduz adequadamente o comportamento esperado do potencial ao longo do eixo de simetria,

constituindo uma aproximação consistente da solução contínua.

Por fim, essa generalização demonstra que procedimentos fundamentados em discretizações geométricas podem ser empregados para investigar problemas tradicionalmente tratados por integrais, preservando simultaneamente a interpretação física e a consistência matemática das soluções. Tal característica amplia o potencial de aplicação da metodologia desenvolvida, tanto em estudos teóricos envolvendo outras geometrias quanto em contextos didáticos voltados ao ensino de eletrostática.

5.3 Análise comparativa

A comparação entre as duas abordagens evidencia que ambas conduzem à mesma expressão final para o potencial eletrostático do disco circular, embora, os caminhos matemáticos percorridos são distintos, na formulação integral, a solução é obtida por meio da determinação de uma primitiva associada ao integrando. Já na abordagem discreta, o resultado emerge do cancelamento sucessivo dos termos de uma soma telescópica construída a partir da discretização geométrica do sistema.

Essa equivalência sugere que a soma telescópica desempenha, no contexto discreto, um papel análogo ao da integração no contexto contínuo. Além de reproduzir corretamente o resultado conhecido da literatura, a metodologia proposta fornece uma interpretação mais intuitiva da contribuição de cada elemento da distribuição de carga para o potencial total.

Do ponto de vista didático, essa característica torna a abordagem particularmente interessante, pois permite discutir conceitos tradicionalmente associados ao cálculo integral utilizando apenas ferramentas de álgebra, geometria e somatórios finitos. Dessa forma, o método desenvolvido pode ser visto como uma alternativa complementar à formulação clássica, contribuindo para a compreensão conceitual dos fenômenos eletrostáticos e para o ensino introdutório da Física Matemática.

5.4 Aplicações didáticas da metodologia proposta

Embora o principal objetivo deste trabalho seja a obtenção de expressões aproximadas para o potencial eletrostático de distribuições circulares e elípticas de carga, a metodologia desenvolvida apresenta também um potencial interesse didático. Essa característica decorre do fato de que a construção do modelo foi realizada utilizando predominantemente ferramentas de matemática elementar, evitando o uso direto do cálculo diferencial e integral durante as etapas

centrais da dedução.

Tradicionalmente, o cálculo do potencial eletrostático gerado por distribuições contínuas de carga é apresentado por meio de integrais. Embora essa abordagem seja matematicamente rigorosa e amplamente consolidada na literatura, ela exige conhecimentos prévios de cálculo que nem sempre estão disponíveis para estudantes em etapas iniciais da formação acadêmica. Como consequência, muitos alunos acabam concentrando sua atenção nos procedimentos algébricos necessários para resolver as integrais, enquanto a interpretação física do problema torna-se secundária.

A metodologia proposta neste trabalho procura inverter parcialmente essa lógica. Em vez de iniciar pela formulação contínua, considera-se inicialmente uma discretização geométrica da distribuição de carga. Dessa forma, o potencial total surge naturalmente como a soma das contribuições produzidas por sucessivos elementos carregados. Essa construção aproxima o estudante do significado físico da superposição de potenciais e permite visualizar de forma mais concreta a contribuição de cada região da distribuição para o resultado final.

Sob essa perspectiva, o processo utilizado pode ser interpretado como uma sequência conceitual composta pela distribuição contínua, discretização, somatório e o resultado físico. Posteriormente, ao considerar um número cada vez maior de subdivisões, observa-se que os somatórios se aproximam progressivamente da formulação integral clássica, estabelecendo a sequência onde aplica-se o somatório, soma de Riemann e por fim a integral.

Essa relação evidencia que o cálculo integral não surge como um conceito isolado, mas como o limite natural de um processo de discretização. Consequentemente, a abordagem desenvolvida pode atuar como uma ponte conceitual entre conteúdos de álgebra, geometria e cálculo, favorecendo uma compreensão mais gradual das ideias matemáticas envolvidas.

Outro aspecto relevante está associado à utilização das somas telescópicas. Enquanto na abordagem contínua a simplificação ocorre por meio da determinação de primitivas e aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, na formulação discreta a simplificação surge através do cancelamento sucessivo dos termos do somatório. Essa analogia permite discutir conceitos avançados de análise matemática utilizando apenas operações algébricas elementares.

Do ponto de vista da formação de professores, essa característica mostra-se particularmente interessante. Estratégias de discretização semelhantes podem ser utilizadas para introduzir tópicos de eletrostática, potencial elétrico e integração em disciplinas de Física Geral, contribuindo para reduzir o grau de abstração frequentemente associado a esses conteúdos.

Portanto, além de reproduzir resultados conhecidos da eletrostática clássica, a metodologia proposta apresenta potencial para utilização em contextos educacionais, funcionando como uma ferramenta complementar para o ensino de Física Matemática e para a construção intuitiva dos conceitos que conduzem ao cálculo integral.

6 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um método aproximado para o cálculo do potencial eletrostático produzido por discos circulares e elípticos uniformemente carregados utilizando apenas ferramentas de matemática elementar. A abordagem proposta baseou-se na discretização geométrica das distribuições de carga em anéis sucessivos, na utilização de somatórios finitos e na exploração de estruturas telescópicas capazes de simplificar significativamente os cálculos envolvidos.

Inicialmente, o método foi aplicado ao disco circular, reproduzindo o resultado clássico conhecido da literatura sem recorrer explicitamente ao cálculo diferencial e integral. Esse resultado demonstrou a consistência da abordagem adotada e forneceu uma base sólida para sua generalização.

Posteriormente, a metodologia foi estendida para o caso de um disco elíptico. Por meio da parametrização adequada da geometria elíptica, da discretização em anéis homotéticos e da utilização de médias angulares, foi possível obter uma expressão aproximada para o potencial eletrostático ao longo do eixo de simetria. A análise mostrou que a influência da excentricidade surge como uma correção de segunda ordem, indicando que pequenas deformações da geometria circular produzem apenas pequenas alterações no potencial.

Os resultados obtidos evidenciam que métodos discretos podem reproduzir com boa precisão comportamentos tradicionalmente obtidos por técnicas integrais. Além disso, a abordagem desenvolvida apresenta potencial didático significativo, pois permite introduzir conceitos avançados da eletrostática utilizando apenas conhecimentos acessíveis de álgebra, geometria e somatórios.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua tanto para a compreensão conceitual do potencial eletrostático em distribuições de carga não circulares quanto para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas voltadas ao ensino de Física, aproximando a modelagem matemática da formação inicial dos estudantes.

Referências

- [1] BISCUOLA, G. J., Villas Bôas, N.; Doca, R. H. *Tópicos de Física 3*. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [2] BOAS, Mary L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2006.
- [3] GRIFFITHS, David J. *Eletrodinâmica*. 4. ed. Rio de Janeiro: Pearson, 2011.
- [4] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física: Eletromagnetismo*. v. 3. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [5] JACKSON, John David. *Classical Electrodynamics*. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2021.
- [6] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*. v. 3. São Paulo: Blucher, 2015.
- [7] RAMALHO J., F., Ferraro, N. G.; Soares, P. A. T. *Os Fundamentos da Física - Volume 3*. 12. ed. São Paulo: Moderna, 2016.
- [8] RIFO, Laura. *Sequências e Recorrências I e II*. Programa Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) - IMPA, 2014. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/poti/alg-aula345-sequencias_e_recorrencias_I_II.pdf. Acesso em: 17 out. 2025.
- [9] STEWART, James. *Cálculo: Volume 1*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [10] TREFETHEN, Lloyd N.; WEIDEMAN, J. A. C. The Exponentially Convergent Trapezoidal Rule. *SIAM Review*, v. 56, n. 3, p. 385–458, 2014. Disponível em: https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/publication/PDF/2014_149.pdf. Acesso em: 23 mar. 2026.