



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**ODEMAR JULIÃO DO NASCIMENTO NETO**

**PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO NO  
ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO**

**MACAPÁ  
2023**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**ODEMAR JULIÃO DO NASCIMENTO NETO**

**PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO NO  
ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ricardo Souza  
Siqueira

**MACAPÁ  
2023**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP  
Elaborado por Mário das Graças Carvalho Lima Júnior – CRB-2 / 1451

---

N244 Nascimento Neto, Odemar Julião do.  
Problemas de Condições de Contorno no Eletromagnetismo Clássico / Odemar Julião do Nascimento Neto. - Macapá, 2023.  
1 recurso eletrônico. 126 folhas.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Física, Macapá, 2023.  
Orientador: Marcelo Ricardo Souza Siqueira.

Modo de acesso: World Wide Web.  
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Eletromagnetismo. 2. Condições de Contorno. 3. Eletrostática. I. Siqueira, Marcelo Ricardo Souza, orientador. II. Universidade Federal do Amapá . III. Título.

CDD 23. ed. – 537.1

---

NASCIMENTO NETO, Odemar Julião do. **Problemas de Condições de Contorno no Eletromagnetismo Clássico.**  
Orientador: Marcelo Ricardo Souza Siqueira. 2023. 126 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Coordenação do Curso de Física. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2023.

**ODEMAR JULIÃO DO NASCIMENTO NETO**

**PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO NO  
ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Data da defesa: 11 de Maio de 2023

**Banca Examinadora**

---

**Prof. Dr. Marcelo Ricardo Souza Siqueira**  
Física - UNIFAP  
Orientador

---

**Prof. Dr. Fábio Furtado Leite**  
Física - UNIFAP  
Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Robert Ronald Maguiña Zamora**  
Física - UNIFAP  
Membro da Banca

MACAPÁ  
2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a mim, por ter trocado horas de sono e descanso por horas de estudo. Por não ter desistido, mesmo quando tudo parecia não dar certo e o cansaço era enorme. Por me dedicar com tanto amor e carinho à essa área maravilhosa da ciência, que é a física.

Agradeço enormemente a minha mãe Rozely e meu pai Osmar por não deixarem faltar nada para seus filhos e me apoiarem em todas as situações adversas durante a jornada que foi esta graduação. Por terem feito sacrifícios que possibilitaram que eu me dedicasse somente aos estudos.

Agradeço imensamente a minha noiva Lana pela paciência que vem tendo comigo. Sem ela, eu provavelmente não conseguiria concluir essa etapa da minha vida. Agradeço a ela por ter sido parceira, amiga, namorada e também pelos puxões de orelha que me deu durante esses longos cinco anos de graduação.

Agradeço ao meu grupo de estudos "A gente vai?" pelas diversas conversas, risadas, brigas e momentos de estudos que tivemos juntos. Sem dúvidas esse grupo de amigos virou uma família.

Agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Siqueira por ter me ensinado pacientemente e com entusiasmo. Por ter visto potencial em mim e ter me auxiliado de diversas maneiras durante minha caminhada no curso.

Agradeço a banca examinadora deste trabalho pela disponibilidade em avaliar o documento e por sugestões de correções que contribuem para melhoria deste trabalho.

Por fim, agradeço ao grupo PET-FÍSICA UNIFAP por ter servido com excelência como base na formação da minha identidade profissional. Grande parte da postura profissional que terei em sala de aula foi com este grupo que aprendi.

*"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,  
não a posse mas o ato de chegar lá,  
que concede a maior satisfação.  
(Carl Friedrich Gauss)*

## RESUMO

Neste trabalho propomos a resolução de alguns problemas didáticos do eletromagnetismo clássico sujeitos a condições de contorno na eletrostática e magnetostática. Apesar desse tema ser encontrado nos livros-texto oficiais, em geral, os exemplos e aplicações destas condições de contorno não são apresentados de maneira clara e detalhada abordando o desenvolvimento matemático do problema. Nesta monografia, problemas de eletrostática e magnetostática são resolvidos com detalhes, discutindo a física de cada problema e apresentando o passo a passo do desenvolvimento matemático para cada situação. Também são resolvidos problemas de expansão multipolar e equação de Poisson e Laplace. Além disso, o objetivo geral do presente trabalho é revisar problemas clássicos de magnetostática e eletrostática e produzir um material baseado em abordagens detalhadas e didáticas nas soluções dos problemas. A metodologia utilizada nesta monografia tem parte teórica, na resolução analítica dos problemas, e parte computacional, na implementação de gráficos de potenciais e campos elétricos e magnéticos via Python. Ao final do trabalho, pretende-se disponibilizar o mesmo no site do curso da física da UNIFAP, para que o mesmo possa ser acessado livremente por interessados no assunto e alunos que queiram prestar o exame unificado de física ou qualquer outro concurso ou prova que tenha esse assunto em seu conteúdo programático. Os scripts dos códigos em Python presentes nas plotagens deste trabalho estarão disponíveis em anexo neste documento, estando assim a disposição para quem acessar o trabalho acadêmico.

**Palavras-chaves:** Eletromagnetismo; Condições de contorno; Eletrostática; Magnetostática;

## ABSTRACT

In this work we propose the resolution of some didactic problems of classical electromagnetism subject to boundary conditions in electrostatics and magnetostatics. Although this theme is found in official textbooks, in general, the examples and applications of these boundary conditions are not presented in a clear and detailed way approaching the mathematical development of the problem. In this monograph, problems of electrostatics and magnetostatics are solved in detail, discussing the physics of each problem and presenting the step-by-step mathematical development for each situation. Problems of multipole expansion and Poisson and Laplace equation are also solved. Furthermore, the general objective of this work is to review classic problems of magnetostatics and electrostatics and produce a material based on detailed and didactic approaches to problem solving. The methodology used in this monograph has a theoretical part, in the analytical resolution of problems, and a computational part, in the implementation of graphs of electric potentials and electric and magnetic fields through the Python language. At the end of the work, it is intended to make it available on the website of UNIFAP physics course, so that it can be freely accessed by those interested in the subject and students who want to take the Unified Physics Exam or any other contest or test that have this subject as scope. The Python code scripts present in the plots of this work will be available as an attachment to this document, thus being available to anyone who accesses the academic work.

**Key-words:** Electromagnetism; Boundary conditions; Eletrostatic; Magnetostatic;

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dipolos elétricos onde as linhas preenchidas são as linhas de campo elétrico e as tracejadas indicam superfícies equipotenciais. a) configuração das linhas de campo para duas cargas elétricas de sinais distintos. b) configuração das linhas de campo para duas cargas elétricas de sinais iguais, nesse caso, sinal positivo. . . . .	15
Figura 2 – Imã onde as linhas do campo magnético são fechadas e tem sua direção definida saindo do polo norte e indo até o polo sul. . . . .	15
Figura 3 – Região $\Omega$ encerrada por uma fronteira $\lambda$ . Neste caso, é conhecido o valor da derivada normal da função nos pontos pertencentes a fronteira. . . . .	21
Figura 4 – Região $\sigma$ encerrada por um contorno $\xi$ . Neste caso, é conhecido o valor da função nos pontos pertencentes ao contorno. . . . .	22
Figura 5 – Região $\Omega$ formada por um contorno formado por dois trechos distintos, um dos trechos possui condições de contorno do tipo Neumann (vermelho) e o outro trecho possui condições de contorno do tipo Dirichlet (azul). . . . .	22
Figura 6 – Dipolo elétrico a uma distância $ \vec{r}  = r$ de um ponto $P$ . . . . .	23
Figura 7 – Configurações de cargas para cada tipo de polo elétrico, do monopolo até o quadrupolo. . . . .	25
Figura 8 – Distribuição contínua de cargas elétricas, com volume $\alpha'$ a uma distância $D$ de um ponto $M$ em relação ao sistema de coordenadas $x, y, z$ . . . . .	26
Figura 9 – Esfera de raio $a$ formada por dois hemisférios separados por um material isolante elétrico. . . . .	29
Figura 10 – Curvas do potencial elétrico na região interna da esfera completa. As curvas de potencial estão em dependência da coordenada esférica radial. Esta coordenada foi definida no Python de zero até o raio da esfera, o qual foi definido com valor 1. . . . .	35
Figura 11 – Prisma com faces laterais aterradas e face superior a um potencial elétrico $U$ e face inferior com um potencial elétrico $U'$ . É importante destacar que, mesmo que a ilustração aparente ser um cubo, não necessariamente $a = b = c$ . . . . .	36
Figura 12 – Gráfico vetorial do cubo de lado 4 referente ao problema 2. a) Visão do campo elétrico na direção da diagonal principal do paralelepípedo. b) Visão frontal do campo elétrico. c) Visão da parte superior do paralelepípedo. . . . .	44
Figura 13 – Cilindro com as bases aterradas e potencial $U_0$ na superfície lateral. . . . .	45
Figura 14 – Gráfico vetorial do cilindro de raio 2 referente ao problema 3. a) Visão padrão do campo elétrico. b) Visão frontal do campo elétrico interno ao cilindro. c) Visão da parte superior do cilindro. . . . .	51
Figura 15 – Esfera em um campo magnético uniforme $\vec{H}_0$ . . . . .	52

Figura 16 – Gráfico do campo vetorial para a região interna da esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície da esfera. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica. . . . .	59
Figura 17 – Gráfico do campo vetorial na região externa a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica. . . . .	60
Figura 18 – Casca esférica com densidade de cargas $\sigma$ girando em torno do eixo $z$ . Note que, $\omega$ coincide com a direção $z$ . . . . .	61
Figura 19 – Esfera com densidade superficial de cargas $\sigma$ rotacionando em torno de um eixo com velocidade angular constante $\omega$ . . . . .	62
Figura 20 – Gráfico do campo vetorial na região interna a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica. . . . .	68
Figura 21 – Gráfico do campo vetorial na região externa a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica. . . . .	68
Figura 22 – Placas paralelas com um dielétrico preenchendo o espaço entre elas. A direção positiva da coordenada $x$ está apontando para fora da página. . . . .	69
Figura 23 – Gráficos do campo vetorial do problema 6. a) Visão padrão na direção da diagonal principal da grade espacial. b) Visão frontal do campo elétrico . . .	72
Figura 24 – Átomo de hidrogênio com seu centro geométrico coincidindo com a origem de um referencial tridimensional. . . . .	73
Figura 25 – Átomo de hidrogênio polarizado devido a presença de um campo elétrico uniforme. . . . .	74
Figura 26 – Plot do gráfico do campo e potencial elétrico para um dipólo elétrico . . . .	78
Figura 27 – Gráfico do campo elétrico em função da distância na direção $z$ . . . . .	81

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Principais conceitos da teoria eletromagnética clássica</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1.1	Contexto histórico das ideias de campo elétrico e magnético . . . . .	14
2.1.2	Campo elétrico . . . . .	14
2.1.3	Campo magnético . . . . .	16
2.1.4	Potencial elétrico . . . . .	17
2.1.5	Potencial magnético . . . . .	17
<b>2.2</b>	<b>As equações de Maxwell</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Condições de contorno</b> . . . . .	<b>20</b>
2.3.1	Condições de contorno do tipo Neumann . . . . .	21
2.3.2	Condições de contorno do tipo Dirichlet . . . . .	21
2.3.3	Condições de contorno do tipo misto . . . . .	21
<b>2.4</b>	<b>Expansão multipolar</b> . . . . .	<b>22</b>
2.4.1	Potencial elétrico de um dipólo elétrico . . . . .	22
2.4.2	Expansão multipolar de uma distribuição contínua de cargas . . . . .	25
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS E DISCUSSÃO FÍSICA</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>Problema 1: Esfera formada por hemisférios com potenciais elétricos de mesmo valor e sinais distintos</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>4.2</b>	<b>Problema 2: Paralelepípedo com as faces laterais aterradas</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>4.3</b>	<b>Problema 3: Cilindro com as bases aterradas e um potencial elétrico não nulo em sua superfície lateral</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.4</b>	<b>Problema 4: Esfera sujeita a um campo magnético uniforme</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.5</b>	<b>Problema 5: Esfera, em rotação, com densidade superficial de cargas</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>4.6</b>	<b>Problema 6: Capacitor de placas paralelas</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>4.7</b>	<b>Problema 7: Polarizabilidade do átomo de hidrogênio simplificado</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>4.8</b>	<b>Problema 8: Potencial elétrico para pontos distantes de uma esfera</b> . . . . .	<b>78</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>84</b>
	<b>APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTOS DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS</b> . . . . .	<b>86</b>
A.0.1	Solução de equações diferenciais pelo método de Frobenius . . . . .	86
A.0.2	Equação diferencial de Cauchy-Euler . . . . .	87
A.0.3	Equação diferencial de Legendre . . . . .	88
A.0.4	Série de Legendere . . . . .	92

A.0.5	Ortogonalidade das funções trigonométricas . . . . .	93
A.0.6	Equação associada de Legendre . . . . .	93
A.0.7	Equação diferencial de Bessel . . . . .	93
A.0.8	Laplaciano em coordenadas cartesianas . . . . .	97
A.0.9	Laplaciano em coordenadas cilíndricas . . . . .	100
A.0.10	Laplaciano em coordenadas esféricas . . . . .	103
	<b>APÊNDICE B – SCRIPTS DAS PLOTAGENS EM PYTHON . . . . .</b>	<b>107</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A utilização de condições de contorno na solução de problemas, na área da física, é decorrente da presença de equações diferenciais na modelagem matemática de sistemas físicos, pois para obter uma solução específica, e matematicamente compatível com o sistema analisado, é necessário a utilização de condições de fronteira que sejam pautadas nas propriedades físicas do fenômeno observado.

Podemos citar como exemplo problemas na física que envolvam o cálculo de potenciais, pois estes são, na maioria das vezes, apresentados como problemas de condições de contorno. Esses tipos de problemas são recorrentes na eletrostática e magnetostática clássica, no cálculo de potenciais elétricos e magnéticos. Além disso, nesses problemas, as condições que governam o comportamento do campo elétrico e magnético na fronteira entre dois meios devem ser conhecidas. Os problemas de condições de contorno podem ser classificados de acordo com o tipo de condição. Os mais recorrentes no eletromagnetismo clássico são os dos tipos: Neumann, Dirichlet e Mistos.

No entanto, apesar de ser um tema muito recorrente e muito presente não só no eletromagnetismo clássico como também na física em geral, é explícita a complexidade dos problemas, em especial na eletrostática e magnetostática, devido as suas respectivas soluções serem pautadas em ferramentas avançadas de física matemática, como por exemplo, funções especiais e equações diferenciais parciais. Após uma revisão bibliográfica de autores como Jackson, Moysés, Milford, Reitz, Bassalo e Griffith, nota-se a pouca presença de matérias que apresentem soluções didáticas completas e detalhadas de problemas de condições de contorno na eletrostática e magnetostática.

Sendo assim, o principal objetivo desse trabalho é revisar problemas do eletromagnetismo clássico e desenvolver, sobre estes, abordagens com soluções completas, detalhadas e didáticas, utilizando ferramentas matemáticas tradicionais e a programação em Python para tornar o estudo mais lúdico e visual, de modo que facilite a compreensão sobre a resolução e a teoria que serve de base para estes problemas.

A linguagem de programação Python foi desenvolvida por Guido van Rossum no final dos anos 1980 e sua primeira versão foi lançada em 1991. Os principais módulos utilizados no desenvolvimento deste trabalho são numpy, matplotlib e mpl-toolkits.

Além de proporcionar a visualização e mapeamento em 3D dos problemas, a principal motivação para a implementação da programação em Python neste trabalho é a necessidade de modernização do ensino de física, pois como qualquer outra área da ciência, a física e seu ensino devem acompanhar o desenvolvimento tecnológico da sociedade.

Dentre diversos fatores vantajosos na utilização do Python neste trabalho, é possível citar que além de ser utilizado na área profissional, ele serve também como uma linguagem inicial para estudantes iniciantes na programação, pois é uma linguagem com uma coleção

de comandos e funções muito vasta, sendo também uma linguagem muito intuitiva e prática [14]. Outra vantagem decorrente do seu uso é o incentivo da inserção de ferramentas tecnológicas no âmbito acadêmico, pois essa linguagem vem sendo utilizada em diversas universidades no Brasil e no Mundo, como por exemplo, IME, USP, UFSC, UNICAMP, Virginia, MIT, Arlington [16]. Neste sentido, este trabalho se insere em um contexto moderno no âmbito da produção acadêmica, sendo desenvolvidos passos de soluções complexas com detalhes e ainda é proporcionada a visualização e os códigos necessários para isso. Assim, é possível aproveitar o conteúdo dessa monografia em aulas, minicursos e outras intervenções didáticas.

Vale ressaltar que problemas de condições de contorno no eletromagnetismo é um possível tema da prova de ingresso para docentes no colegiado de Física na instituição UNIFAP. Assim, outra motivação para esse trabalho é disponibilizar um material de qualidade que possa servir de auxílio para os futuros colegas que queiram ingressar como docentes no curso de licenciatura em física da UNIFAP.

Outra motivação é a presença de problemas de condições de contorno na eletrostática e magnetostática no Exame Unificado de Física (EUF) para o ingresso na pós-graduação. Sendo assim, é também objetivo deste trabalho servir de material de consulta para os graduandos em bacharelado em física e licenciatura em física de todo o país.

Por estes motivos, este trabalho mostra-se relevante e tem grande potencial para ajudar não só a comunidade de físicos do Estado do Amapá, como também de todo nosso país, ou até de outros países que falem a língua portuguesa. Para cumprir o objetivo principal, a versão final deste trabalho com correções que por ventura existirem, será disponibilizada em PDF nos sites do curso.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Principais conceitos da teoria eletromagnética clássica

Antes de ser feita a apresentação da solução dos problemas presentes nesse trabalho, é fundamental apresentar os principais conceitos e definições que servem de base para a teoria eletromagnética clássica. A seguir, serão apresentadas diversas definições e conceitos de acordo com alguns dos autores mais notáveis com relação ao eletromagnetismo clássico, além disso, será feita uma breve abordagem histórica de alguns dos conceitos apresentados.

#### 2.1.1 Contexto histórico das ideias de campo elétrico e magnético

A noção de campo elétrico e magnético surgiu, no século XVIII, quando cientistas investigaram o efeito que uma corrente elétrica causa a uma bússola próxima, um dos principais cientistas que conduziu esse experimento foi Hans Orsted (1777-1851). Esse fenômeno intrigou os pesquisadores da época por não se encaixar no conhecimento físico existente. O efeito consistia na mudança na direção da agulha da bússola quando próxima a um fio condutor pelo qual passava uma corrente elétrica. Michael Faraday (1791-1867) e Ampère (1775-1836) foram os principais físicos da época que buscaram explicações para o fenômeno observado. Ampère usou uma abordagem baseada na força à distância, enquanto Faraday, observou pó de limalha de ferro em regiões próximas de um ímã e, com base nas suas observações, propôs um modelo de linhas de força, sugerindo que a interação entre os corpos observados ocorria por meio de um campo de forças preenchido por essas linhas [8]. Faraday propôs linhas de campo elétrico e magnético, o modelo que o mesmo sugeriu é apresentado nas Figuras 1 e 2.

Faraday observou que a direção das linhas de campo tinham início nas cargas elétricas positivas e iam até as negativas. As principais características desse modelo são indicar que a intensidade dos campos aumenta em regiões onde a aglomeração de linhas é maior. Além disso, de acordo com esse paradigma, o vetor campo elétrico e o vetor campo magnético são tangentes às linhas de campo. Na Figura 1, as linhas tracejadas indicam as superfícies equipotenciais, as quais são definidas como superfícies onde o potencial elétrico possui o mesmo valor para todos os pontos da mesma.

#### 2.1.2 Campo elétrico

Para entender as definições a seguir, imagine a seguinte configuração física, tem-se um sistema formado por várias cargas elétricas distribuídas em certa configuração no espaço, e deseja-se colocar nessa distribuição uma carga de prova.

Segundo Milford, Reitz e Christy o campo elétrico é o limite da força sobre a *carga de prova*  $q$ , a qual tende a zero. Essa carga perturba a configuração inicial de cargas, então, a

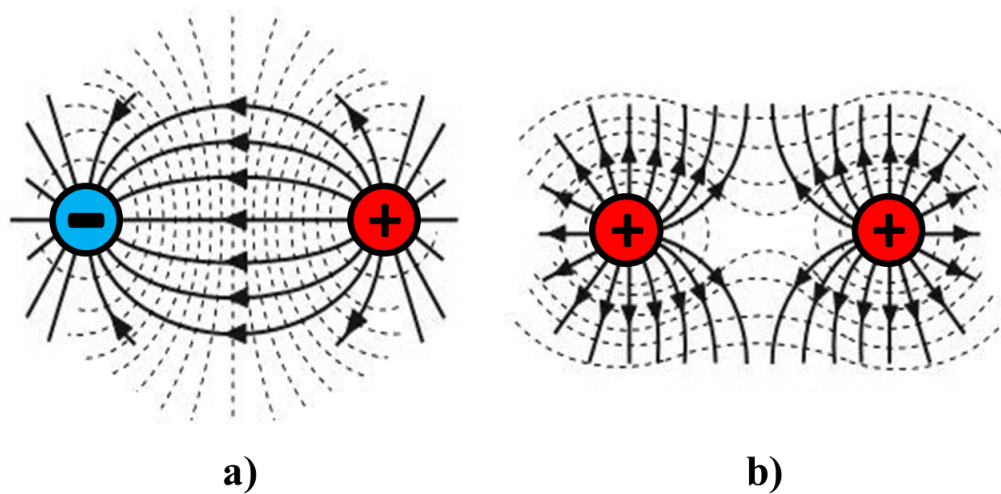


Figura 1 – Dipolos elétricos onde as linhas preenchidas são as linhas de campo elétrico e as tracejadas indicam superfícies equipotenciais. a) configuração das linhas de campo para duas cargas elétricas de sinais distintos. b) configuração das linhas de campo para duas cargas elétricas de sinais iguais, nesse caso, sinal positivo.

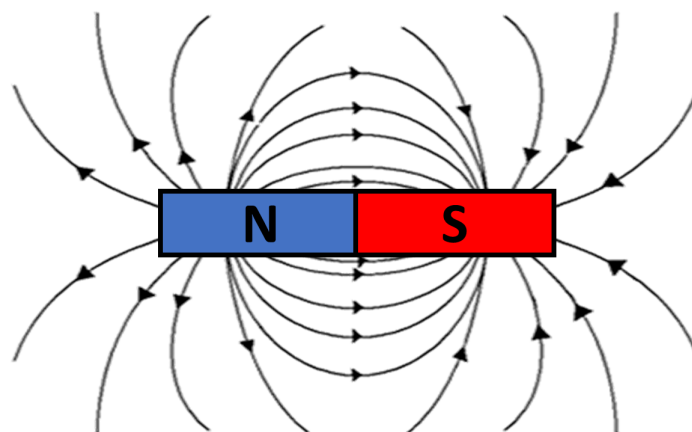


Figura 2 – Imã onde as linhas do campo magnético são fechadas e tem sua direção definida saindo do polo norte e indo até o polo sul.

tendência  $q \rightarrow 0$  diminui a perturbação que a carga de prova causa na configuração original do sistema, isso em um contexto macroscópico [17]. Por outro lado, Moysés também apresenta uma definição semelhante à anterior em sua obra de física básica, isto é, campo elétrico é força por unidade de carga. No entanto, o mesmo ressalta que não é possível tomar o limite em (2.1) em um contexto eletromagnético microscópico, pois a carga de prova não pode ser menor que a carga elementar  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  [15]. Assim, tomando estas ideias, em um contexto macroscópico, o campo elétrico  $\vec{E}$  é definido como:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2.1)$$

O autor Jackson [13] também é adepto da definição de campo elétrico apresentada na

equação (2.1), a qual utiliza um limite para a carga de prova tender a zero. Além disso, segundo o autor o campo elétrico também pode ser definido como força elétrica por unidade de carga em determinado ponto do espaço, sendo assim, o campo elétrico é uma função vetorial.

Para Feynman, o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  é uma forma de indicar as forças que seriam experimentadas no instante  $t$  por uma carga de prova  $q$  colocada em  $\vec{r} = (x, y, z)$ , com a condição de que essa carga não perturbe a configuração das cargas geradoras de campo. Além disso, Feynman acrescenta, na definição de campo elétrico, afirmando que é possível associar cada ponto do espaço  $(x, y, z)$  um vetor  $\vec{E}$  que pode variar no tempo, concordando assim, com a definição de campo elétrico de Jackson, isto é, o campo elétrico é uma função vetorial da forma  $\vec{E}(x, y, z, t)$  [10].

Segundo Savelyev [18], cargas em repouso possuem sua interação intermediada apenas pelo campo elétrico. De acordo com o autor, uma carga elétrica altera as propriedades do espaço ao redor de si mesma, gerando nesse espaço um campo elétrico. Esse campo se manifesta quando posiciona-se uma outra carga ao redor da carga geradora do campo, e essa outra carga sofre a ação de uma força.

### 2.1.3 Campo magnético

Como apresentado na subseção anterior, Savelyev [18] assume que cargas em repouso interagem através do campo elétrico. Por outro lado, segundo o autor, cargas em movimento interagem não somente através do campo elétrico, mas também através do campo magnético. Para definir tal campo, Savelyev, em sua obra, cita o experimento de Oersted e conclui que esse campo tem intensidade e direção, então deve ser representado por um vetor  $\vec{B}$ . Além disso, o autor acrescenta afirmando que esse campo não pode ser gerado por cargas em repouso e que as cargas elétricas, em movimento, alteram as propriedades do espaço em torno de si devido a manifestação do campo magnético. Outro autor, o qual segue a mesma definição de Savelyev, é Griffiths, segundo o mesmo, uma carga em movimento gera um campo magnético  $\vec{B}$ .

Segundo Moysés, é verificado experimentalmente que, o campo magnético exerce uma força em cargas em movimento e que essa força é diretamente proporcional à carga e à magnitude da velocidade da partícula. Além disso, o autor afirma que a força é perpendicular simultaneamente à direção do campo magnético e à direção da velocidade da partícula [15].

Para definir o campo magnético, Jackson inicia sua explicação fazendo a distinção entre eletrostática e magnetostática, afirmando que não existem "cargas magnéticas" livres [13]. Assim, é de se esperar que o comportamento do campo magnético seja diferente do comportamento do campo elétrico. Para o autor, a entidade fundamental no estudo do magnetismo é o dipolo magnético, isto é, não é possível ocorrer uma estrutura magnética monopolar, um exemplo de estrutura dipolar magnética é o ímã apresentado na Figura 2. Ainda de acordo com Jackson, na presença de materiais magnéticos o dipolo magnético se alinha na direção da densidade de fluxo

magnético, densidade essa simbolizada por  $\vec{B}$  [13].

A definição de Feynman para o campo magnético é semelhante a definição que ele mesmo apresenta para campo elétrico. Para o autor, o campo magnético é uma função vetorial  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  que é capaz de associar a cada ponto do espaço um vetor  $\vec{B}$  que pode variar no tempo [10].

#### 2.1.4 Potencial elétrico

Os autores Bassalo, Griffiths e Jackson possuem a mesma interpretação quando o assunto é potencial elétrico. Para os três autores, o potencial em questão é o trabalho realizado pela força elétrica para deslocar uma carga, exposta a um campo elétrico externo, de um ponto a outro no espaço [3, 11, 13]. É possível definir o potencial elétrico da forma:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(r') \cdot d^3\vec{r}' = - \frac{1}{q} \int_{\infty}^r \vec{F}(r') \cdot d^3\vec{r}' = - \frac{W}{q}. \quad (2.2)$$

Na equação (2.2), o sinal negativo na equação, definindo  $V$  em termos do campo elétrico, é uma convenção associada à trazer cargas do infinito, onde o potencial é zero, até uma certa posição a uma distância  $r$  do ponto que se deseja observar. Utilizando ferramentas do cálculo vetorial, é possível também escrever a expressão do campo elétrico em função do potencial elétrico.

$$\vec{E} = -\nabla V. \quad (2.3)$$

Ou seja, o campo eletrostático é definido como o menos gradiente do potencial (função escalar). O gradiente é uma espécie de derivada tridimensional para campos escalares. Essa definição é consequência direta do caráter conservativo do campo  $\vec{E}$ . Em termos práticos, é muito mais simples encontrar o potencial e posteriormente aplicar o gradiente para achar o campo elétrico [11, 13, 17]. Substituindo a relação (2.3) em (2.10), tem-se a equação de Poisson em termos do potencial elétrico:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (2.4)$$

Com base na equação (2.4), para os casos onde na região de interesse não existe uma densidade de cargas elétricas, isto é,  $\rho(\vec{r}) = 0$ , tem-se a chamada equação de Laplace.

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad (2.5)$$

#### 2.1.5 Potencial magnético

Na obra de Jackson, para casos onde  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , é possível escrever o campo magnético em termos de um potencial escalar magnético, na forma  $\vec{B} = -\nabla \phi_m$ , onde  $\phi_m$  é análogo ao

potencial elétrico apresentado na subseção anterior [13]. Por outro lado, sabe-se das equações de Maxwell que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , então pelas identidades vetoriais, é possível escrever  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , onde  $\vec{A}$  é definido como o potencial vetor magnético [13].

Na obra de Feynman, o potencial vetor magnético, no contexto do eletromagnetismo clássico, é apresentado sem significado físico, apenas como algo matemático [10]. Em acordo com a apresentação de Feynman, Bassalo, em sua obra, afirma que o potencial vetor foi primeiramente apresentado por Maxwell em 1871 como um artifício matemático. No entanto, em 1959, Aharonov e Bohm apresentam uma interpretação física para o potencial vetor através da mecânica quântica, pois é possível observar a ação do potencial em partículas, mesmo em regiões para as quais os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são nulos [1]. Essa discussão foge do escopo deste trabalho e o leitor poderá encontrar referências sobre isso no final do texto [3].

Para Griffiths, o potencial vetor  $\vec{A}$  não admite uma interpretação física simples como o potencial elétrico, isto é, energia potencial por unidade de carga. No entanto, o autor destaca a utilidade do potencial vetor, pois ao expressar as equações de Maxwell através dos potenciais  $V$  e  $\vec{A}$ , tem-se quatro equações no total para resolvermos. Desse modo, deve-se encontrar as componentes do potencial vetor  $A_x, A_y, A_z$  e o potencial escalar  $V$ . Por outro lado, com as equações de Maxwell em termos dos campos, tem-se seis equações no total  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y$  e  $B_z$ . Em conclusão, Griffiths destaca a utilidade de manipular um número reduzido de equações ao expressar as equações de Maxwell utilizando os potenciais [11].

## 2.2 As equações de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) se inspirou nas descobertas de Michael Faraday (1791-1867), de que um campo magnético variável no tempo era capaz de gerar um campo elétrico. Buscou o efeito análogo, um campo elétrico variável no tempo gerava um campo magnético. Esta simetria prevista por Maxwell não havia sido prevista por Faraday [9].

Ao tentar verificar a questão do acoplamento entre campos elétricos e magnéticos variáveis no tempo, Maxwell verificou a inadequação da lei de Ampère, pois esta não respeitava o princípio da conservação da carga elétrica. Em seus estudos, Maxwell introduziu o conceito de corrente de deslocamento  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  na lei de Ampère. Este termo é a oscilação temporal do vetor deslocamento elétrico  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\vec{P}$  é o vetor de polarização de um dielétrico. A introdução deste termo elimina a contradição na lei de Ampère. Assim, as equações de Maxwell, que descrevem o eletromagnetismo clássico em um meio material, são dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}), \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Na equação (2.6)  $\rho$  é a densidade de cargas livres, que podem ser cargas positivas ou negativas. A equação (2.6) mostra que as fontes de campo  $\vec{D}$  (consequentemente de  $\vec{E}$ ) são as cargas livres, portanto a divergência é proporcional à densidade de cargas no ponto  $\vec{r}$ . Já na equação (2.7), percebe-se que a variação temporal do campo de indução magnética  $\vec{B}$  dá origem a um campo elétrico não conservativo, pois na eletrostática  $\nabla \times \vec{E} = 0$ . O sinal negativo na lei de Faraday significa que correntes elétricas decorrentes do fenômeno de indução se orientam de maneira a opor-se à variação do fluxo magnético [15].

A inexistência de monopolos magnéticos é expressa pela equação (2.8). Como a divergência de um campo vetorial é proporcional às suas fontes e sorvedouros de linhas de campo e as linhas de  $\vec{B}$  são sempre fechadas, então a divergência da indução magnética é nula em todos os pontos. Na equação (2.9), por sua vez, expressa que o campo não é conservativo na presença de correntes ou variações temporais de campo elétrico, sendo inclusive possível ser gerado por dois tipos de fontes simultaneamente: a densidade de corrente  $\vec{J}$  e a corrente de deslocamento de Maxwell.

A análise completa destas equações pode ser motivo de vários estudos, artigos e livros, devido à sua complexidade. Para os objetivos deste trabalho, restringe-se o alcance destas equações para as situações que caracterizam a eletrostática ( $\nabla \times \vec{E} = 0$ ) e a magnetostática no vácuo sem a presença de corrente de deslocamento. Com isso, as equações de Maxwell assumem a forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.13)$$

Na equação (2.10),  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$  é a permissividade elétrica no espaço livre, ou permissividade de vácuo. Ela representa a capacidade de um meio em permitir que o fluxo elétrico se torne mais ou menos denso. Quanto maior seu valor, menos intenso o campo será. Observe que nos casos estáticos, os campos não possuem dependência temporal.

As equações de Maxwell são a expressão do teorema de Helmholtz para os campos elétricos e magnéticos, uma vez que este teorema afirma que para caracterizar completamente um campo vetorial é necessário conhecer sua divergência e seu rotacional em todos os pontos da região que pretende-se analisar. Nas últimas equações acima, temos a divergência e a circulação tanto para  $\vec{E}$  quanto para  $\vec{B}$ . A divergência permite localizar espacialmente fontes e sorvedouros de campos e o rotacional mede pontualmente a capacidade de giro deste campo.

## 2.3 Condições de contorno

Existem problemas físicos que envolvem várias variáveis independentes em sua modelagem matemática, resultando em equações diferenciais parciais em vez de ordinárias. O método de separação de variáveis, substitui a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias que devem ser resolvidas utilizando condições iniciais ou de contorno, para que a solução final esteja de acordo com o fenômeno físico modelado [6].

A solução da equação diferencial parcial é então dada como uma combinação linear de soluções das equações diferenciais ordinárias. Segundo Boyce [6], as aplicações físicas de equações diferenciais parciais levam a um problema, cujo valor da variável dependente ou de sua derivada é especificado em dois pontos diferentes. Essas condições para os valores da função e sua derivada em pontos distintos são as chamadas condições de contorno, diferentes das condições iniciais, as quais especificam o valor da função e de sua derivada em um mesmo ponto [6].

Ainda de acordo com o autor, uma condição de contorno recorrente nos problemas em geral é vista quando, é especificado o valor de  $f(x)$  em cada ponto da fronteira; onde a função dada é solução da equação de Laplace. Por outro lado, em outros problemas, é dado o valor da derivada, ou taxa de variação de  $f(x)$  na direção normal à fronteira. Além disso, também é possível ocorrer condições de contorno mais elaboradas, de forma onde  $f(x)$  pode ser especificada em um trecho da fronteira e em outro trecho da fronteira pode ser especificada a derivada normal ao contorno de  $f(x)$  [6]. Os problemas de condições de contorno podem ser classificados em diversas maneiras<sup>1</sup>. No contexto da física, as condições de contorno de um problema indicam o comportamento das componentes de um campo na mudança de um meio para outro, isto é, o comportamento do campo na interface entre dois meios. A seguir serão apresentadas os principais tipos de condições de contorno.

<sup>1</sup> As classificações apresentadas neste trabalho não são às únicas existentes

### 2.3.1 Condições de contorno do tipo Neumann

Um problema de condição de contorno é do tipo **Neumann** quando é dada uma região fechada  $\Omega$  delimitada por uma fronteira (contorno)  $\lambda$  e com a condição de que exista uma função, que possui derivada normal dada por:

$$f(x) = \frac{\partial y}{\partial n} = \nabla y(x) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x). \quad (2.14)$$

Aqui,  $x \in \lambda$ . Além disso, a função  $f(x)$  deve ser solução da equação de Laplace [7]. Para ilustrar a situação descrita acima, tem-se a Figura 3.

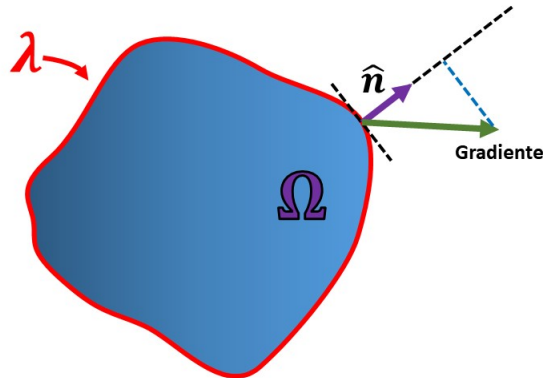


Figura 3 – Região  $\Omega$  encerrada por uma fronteira  $\lambda$ . Neste caso, é conhecido o valor da derivada normal da função nos pontos pertencentes a fronteira.

### 2.3.2 Condições de contorno do tipo Dirichlet

Um problema de condição de contorno é do tipo **Dirichlet** quando é dada uma região fechada  $\sigma$  delimitada por uma fronteira (contorno)  $\xi$  e com a condição de que exista uma função contínua  $f(x) = \psi$  que seja solução da equação de Laplace com  $x \in \xi$ . Ou seja, é classificado um problema do tipo Dirichlet quando, ao aplicar as condições de contorno na solução do problema, o resultado de tal procedimento especifique os valores que a solução deve assumir na fronteira  $\xi$  [7]. Para ilustrar este tipo de condição de contorno, tem-se a Figura 4.

### 2.3.3 Condições de contorno do tipo misto

Um problema de condições de contorno é do tipo **misto**, quando, em uma parte da fronteira é possível utilizar condições de contorno de Neumann e na outra parte da fronteira é possível utilizar condições de contorno de Dirichlet [12]. Para ilustrar a situação, tem-se a Figura 5.

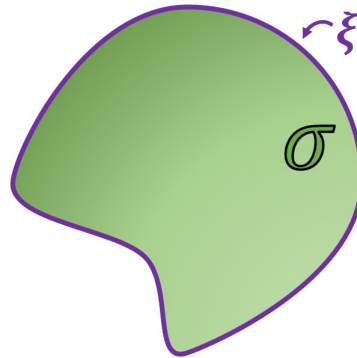


Figura 4 – Região  $\sigma$  encerrada por um contorno  $\xi$ . Neste caso, é conhecido o valor da função nos pontos pertencentes ao contorno.

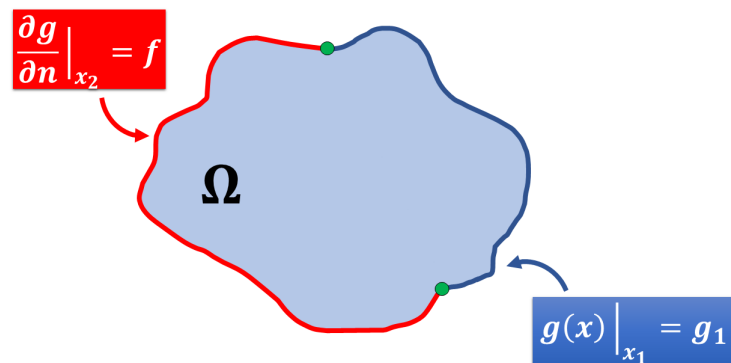


Figura 5 – Região  $\Omega$  formada por um contorno formado por dois trechos distintos, um dos trechos possui condições de contorno do tipo Neumann (vermelho) e o outro trecho possui condições de contorno do tipo Dirichlet (azul).

## 2.4 Expansão multipolar

### 2.4.1 Potencial elétrico de um dipólo elétrico

Um dipolo elétrico é formado por duas partículas de cargas de sinais distintos e mesma intensidade separadas por uma distância  $d$  [11]. Imagine a seguinte situação, você deseja encontrar o potencial elétrico gerado por esse dipolo em um ponto  $P$  do espaço, localizado a uma grande distância do centro do dipolo. Para ilustrar essa situação, segue a Figura 6.

O potencial no ponto  $P$  devido ao dipolo elétrico, pelo princípio da superposição, é a soma dos potenciais individuais que cada carga ( $+q$  e  $-q$ ) gera nesse ponto. Então:

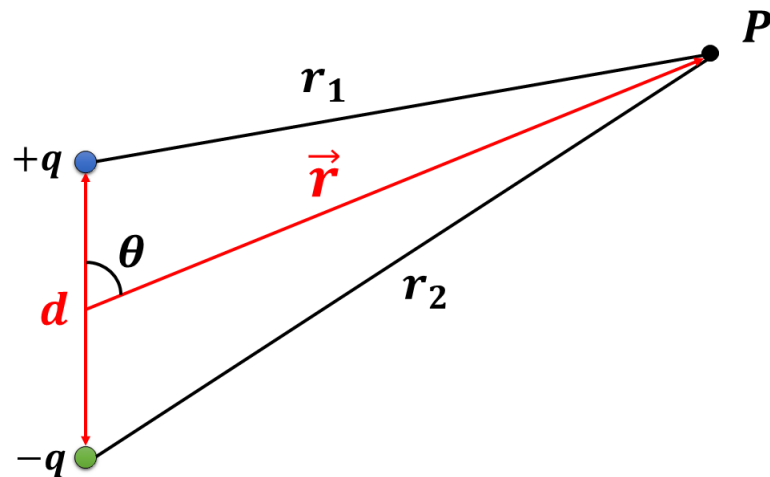


Figura 6 – Dipolo elétrico a uma distância  $|\vec{r}| = r$  de um ponto  $P$ .

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r_2} \right) \\
 V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} \\
 V(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

De acordo com a Figura 6, pela lei dos cossenos, é possível escrever:

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd \cos \theta \tag{2.16}$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd \cos \theta \tag{2.17}$$

As equações (2.16) e (2.17) nos levam a:

$$r_1^2 = r^2 \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d \cos \theta}{r} \right) \tag{2.18}$$

$$r_2^2 = r^2 \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d \cos \theta}{r} \right) \tag{2.19}$$

No entanto, lembremos do objetivo nessa etapa. O ponto onde deseja-se calcular o potencial está a uma grande distância do dipolo, então devemos impor a condição  $r \gg d$ . Dessa maneira, verifica-se que

$$r_1^2 = r^2 \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right)$$

$$r_2^2 = r^2 \left( 1 + \frac{d \cos \theta}{r} \right)$$

$$r_1 = r \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{1/2}$$

$$r_2 = r \left( 1 + \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \quad (2.21)$$

É possível aplicar a expansão binomial<sup>2</sup> nas expressões (2.20) e (2.21), tem-se:

$$\left( 1 \mp \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \approx \left( 1 \pm \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \quad (2.22)$$

Substituindo a aproximação da equação (2.22) em (2.20) e (2.21), tem-se:

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \quad (2.24)$$

Por fim, substituindo as expressões (2.23) e (2.24) em (2.15), tem-se:

$$\begin{aligned} V(r) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{d \cos \theta}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{d \cos \theta}{2r^2} \right) \\ V(r) &\approx \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Aqui,  $\vec{p} = qd\hat{k}$  é o momento de dipolo, na direção vertical de acordo com a Figura 6.  $\hat{r}$  é o versor na direção do ponto de observação  $P$ .

<sup>2</sup> A expansão binomial é  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para valores pequenos de  $x$

Com o resultado presente na equação (2.25), nota-se que o valor do potencial elétrico de um dipolo decai proporcionalmente com o inverso do quadrado da distância ( $1/r^2$ ) entre o dipolo e o ponto de interesse. Comparando com a expressão do potencial obtida na equação (2.25) com o potencial gerado por uma carga pontual ( $q/4\pi\epsilon_0 r$ ), nota-se que, para pontos a grandes distâncias das configurações de cargas, o valor do potencial de um dipolo decai mais rapidamente que o valor do potencial de um monopolo elétrico [11].

Seguindo esse ideia, para um quadrupolo elétrico (junção de dois dipolos), o potencial decai proporcionalmente com o inverso do cubo ( $1/r^3$ ). Para um octopolo, o potencial decai proporcionalmente com o inverso da quarta potência da distância ( $1/r^4$ ) [11]. Para ilustrar as configurações de cargas citadas acima, segue a Figura 7.

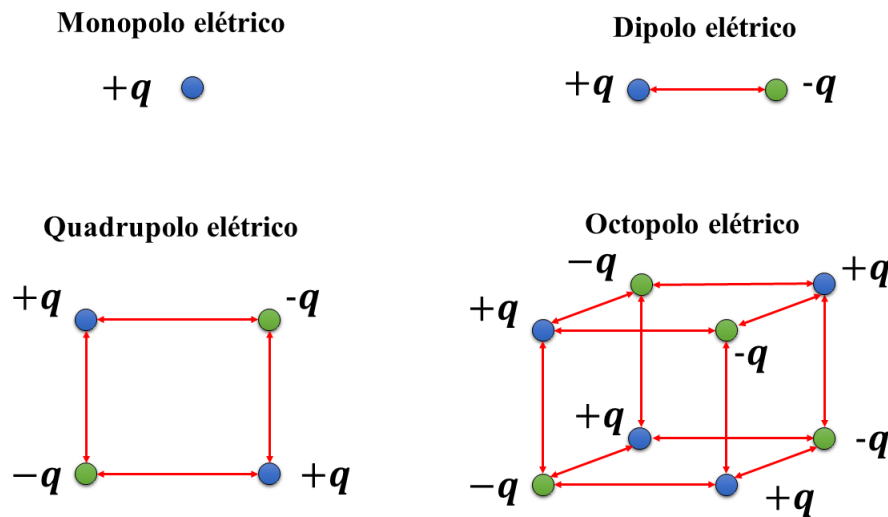


Figura 7 – Configurações de cargas para cada tipo de polo elétrico, do monopolo até o quadrupolo.

### 2.4.2 Expansão multipolar de uma distribuição contínua de cargas

A expansão realizada na subseção anterior é válida para uma distribuição de cargas discretas. Na presente subseção é apresentada a expansão para o potencial elétrico em potências de  $1/r$  para uma distribuição contínua de cargas a uma distancia  $D$  de um ponto de interesse  $M$ . Para esse ilustrar esse caso, segue a Figura 8.

De acordo com a ilustração desta situação, é traçado um vetor posição  $\vec{r}'$  da origem do sistema de coordenadas até o centro do diferencial de volume da distribuição de cargas. Além disso, é traçado um vetor posição  $\vec{r}$  da origem do sistema de coordenadas até o ponto onde deseja-se calcular o potencial elétrico. Note que é formado um ângulo  $\theta'$  entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ . Para esse caso, o potencial elétrico será dado por:

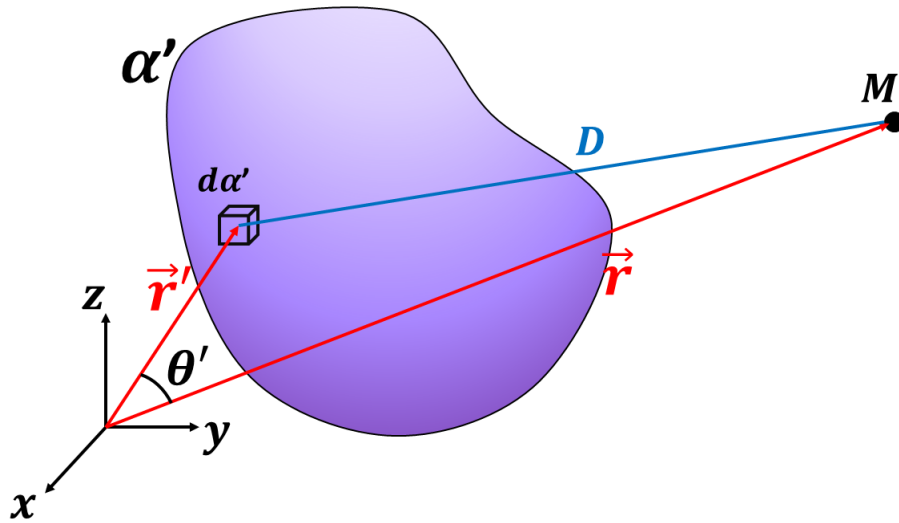


Figura 8 – Distribuição contínua de cargas elétricas, com volume  $\alpha'$  a uma distância  $D$  de um ponto  $M$  em relação ao sistema de coordenadas  $x, y, z$ .

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{D} \rho(r') d\alpha' \quad (2.26)$$

Onde  $\rho(r')$  é a função que representa a densidade volumétrica de cargas da distribuição em determinada posição  $r'$ . Utilizando novamente a lei dos cossenos, de acordo com as informações anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} D^2 &= (r')^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta' \\ D^2 &= r^2 \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta' \right] \\ D^2 &= r^2 \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right) \right] \\ D &= r \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right) \right]^{1/2} \\ D &= r(1 + \eta)^{1/2} \\ \frac{1}{D} &= \frac{1}{r}(1 + \eta)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Onde  $\eta = \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right)$ . Para pontos muito distantes da distribuição de carga, implica que  $r \gg r'$ , consequentemente  $\eta$  é muito pequeno. Então, é possível aplicar a expansão binomial na equação (2.27). No entanto, como deseja-se obter uma expressão geral para a expansão, serão considerados os demais termos e não somente o primeiro, como foi feito na subseção anterior. Prosseguindo com a expansão binomial, tem-se:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{8}\eta^2 - \frac{5}{16}\eta^3 + \dots \right]$$

Colocando  $\eta$  explicitamente em função de  $r'$ ,  $r$  e  $\theta'$ , verifica-se que

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{(3 \cos^2 \theta' - 1)}{2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \frac{(5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta')}{2} + \dots \right]$$

Generalizando a expressão (2.28), tem-se:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \theta') \quad (2.28)$$

Onde  $P_k(\cos \theta')$  são os polinômios de Legendre. Por fim, substituindo a expressão (2.28) em (2.26), tem-se:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \theta') \rho(\vec{r}') d\alpha' \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(k+1)}} \int (r')^k P_k(\cos \theta') \rho(\vec{r}') d\alpha' \end{aligned} \quad (2.29)$$

O resultado (2.29) é o qual desejávamos, uma expressão geral para a expansão do potencial elétrico. A expressão (2.29) é a **expansão multipolar** do potencial elétrico em potências de  $1/r$  para distribuições contínuas de cargas [11]. Note que, para  $k = 0$  temos o termo correspondente a contribuição de um monopolo elétrico, para  $k = 1$ , tem-se a expansão responsável pela contribuição do dipolo, para  $k = 2$  a contribuição do quadrupolo, para  $k = 3$  a contribuição do octopolo e assim sucessivamente [11].

Segundo Griffiths, o termo de menor ordem da expansão (2.29) indica o valor aproximado do potencial elétrico para grandes valores de  $r$ , enquanto termos de ordem mais alta fornecem informações mais precisas para o valor do potencial. [11].

### **3 METODOLOGIA**

A metodologia adotada para a realização deste trabalho é de revisão bibliográfica, pois como foi apresentado na introdução, parte da pesquisa envolve a revisão de problemas já existentes na bibliográfica.

A abordagem do presente trabalho é quanti-qualitativa, isto é, além de pesquisar problemas e artigos já existentes na bibliografia e resolve-los utilizando ferramentas matemáticas e análise de gráficos, serão realizadas discussões e análises puramente teóricas sobre cada problema apresentado.

Além disso, será utilizada uma abordagem computacional, através da implementação em Python para verificar o comportamento dos campos e potenciais elétricos e magnéticos em cada problema. Essa abordagem poderá ser notada justamente na discussão qualitativa sobre os problemas de condições de contorno apresentados no trabalho.

## 4 RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS E DISCUSSÃO FÍSICA

### 4.1 Problema 1: Esfera formada por hemisférios com potenciais elétricos de mesmo valor e sinais distintos

Este problema, encontra-se resolvido na obra Eletrodinâmica Clássica do autor Jackson [13]. No entanto, o passo a passo até chegar na solução do mesmo não é explicitado no livro.

Nesse problema, tem-se a junção de dois hemisférios, onde o hemisfério norte está a um potencial elétrico  $+V$  e o hemisfério sul está a um potencial  $-V$ . A esfera possui um raio  $a$  e os hemisférios são unidos por um material eletricamente isolante. É desejado calcular o potencial elétrico para pontos interiores à esfera. Ilustrando a situação, tem-se a Figura 9.

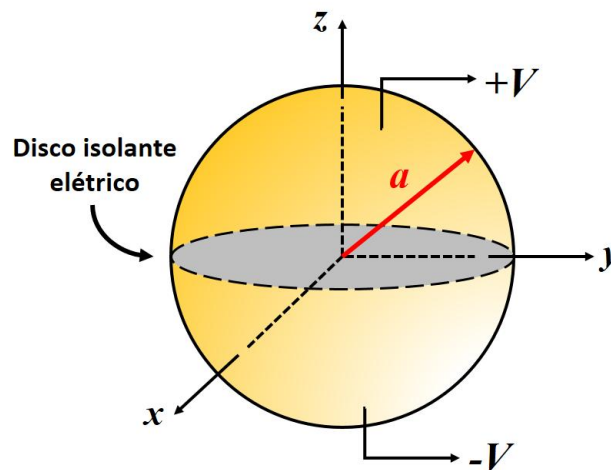


Figura 9 – Esfera de raio  $a$  formada por dois hemisférios separados por um material isolante elétrico.

Para iniciar, deve-se definir qual equação será utilizada para resolver esse problema, a equação de Laplace ou a equação de Poisson. A equação de Laplace é utilizada quando, na região onde pretende-se calcular o potencial elétrico, não existe distribuição de cargas elétricas, caso contrário, será utilizado a equação de Poisson.

Nesse caso, na região interior da esfera não há cargas, então utiliza-se a equação de Laplace representada pela equação (4.1). Além disso, devido a geometria do problema ser esférica, o operador laplaciano deve ser expresso em coordenadas esféricas, representado pela equação (4.2). Então, tem-se:

$$\nabla^2 V(r, \theta, \phi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.2)$$

De acordo com a Figura 9, nota-se que a origem do sistema referencial adotado coincide com o centro da casca condutora, então haverá simetria azimutal para esse caso, de modo que o potencial elétrico no interior e fora da esfera não deve depender da coordenada  $\phi$  e a equação (4.2) se reduz à:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.3)$$

A solução da equação (4.3) é dada pela expressão (A.60), como apresentado na subseção (A.0.10). Devido a simetria azimutal, isto é,  $m = 0$ , a solução geral para o potencial elétrico nesse caso é:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] [C_l P_l(\cos \theta) + D_l Q_l(\cos \theta)] \quad (4.4)$$

Como queremos uma solução para dentro da esfera, então esta solução deve ser bem comportada para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . No entanto, como apresentado na subseção (A.0.3), a função  $Q_l$  diverge quando seu argumento é  $\pm 1$ , ou seja, diverge para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ .

A função  $V(r, \theta)$  não deve divergir na parte interna da esfera, pois dentro da mesma não existem fontes de cargas elétricas. Dessa forma, devemos impor  $D_l = 0$  para que a solução  $V(r, \theta)$  seja bem comportada. Então, o potencial elétrico para a região interna da esfera é dado por:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (4.5)$$

Note que a constante  $C_l$  pode ser englobada pelas demais constantes. A solução específica desse caso será obtida após a aplicação das condições de contorno na equação (4.5). Nesse caso, tem-se duas constantes para determinar, são elas:  $A_l$  e  $B_l$ , então devem ser aplicadas duas condições de contorno, as quais são apresentadas abaixo:

- Sabendo que não existem cargas elétricas no centro da esfera composta pelos hemisférios, isto é, na origem do sistema de coordenadas, então o potencial elétrico nesse ponto deve ter valor  $V'$  finito.

Matematicamente:  $V(r = 0, \theta) = V'$

- Quando  $r = a$ , isto é, na superfície da esfera, o potencial elétrico assumirá valor constante  $+V$  para o hemisfério superior e  $-V$  para o hemisfério inferior.

Matematicamente:

$$V(a, \theta) = \begin{cases} +V, & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \\ -V, & (\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi) \end{cases}$$

Aplicando a primeira condição de contorno, tem-se:

$$V(r=0, \theta) = V' = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l 0 + \frac{B_l}{0} \right] P_l(\cos \theta)$$

$$V(r=0, \theta) = V' = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{0} P_l(\cos \theta) \quad (4.6)$$

De acordo com a equação (4.6), nota-se que, para a origem da esfera, no termo  $\frac{B_l}{0}$  existe uma divergência, no entanto, nessa região o potencial deve ser finito.

Então, para contornar este problema, deve-se exigir que  $B_l = 0$ , pois desse modo elimina-se a divergência do potencial elétrico em  $r = 0$ . Dessa forma, a equação (4.5) pode ser reescrita como:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (4.7)$$

Aplicando a segunda condição de contorno na equação (4.7), tem-se:

$$V(r=a, \theta) = V(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta)$$

É possível desenvolver a função  $V(a, \theta)$  em série de Legendere, como foi visto na subseção (A.0.4). Fazendo isto, verifica-se que

$$\int_0^{\pi} V(a, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi} V(a, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.8)$$

Na equação (4.8) tem-se a condição de ortogonalidade para polinômios de Legendere, a qual é definida da seguinte forma:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{nl}$$

Então, tem-se:

$$\int_0^\pi V(a, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{2}{2l+1} \delta_{nl} \quad (4.9)$$

Fazendo uma análise no membro direito da equação (4.9) observa-se que, ao expandir o somatório, dentre os valores que  $l$  pode assumir, somente resultará em um termo não nulo quando  $l = n$ . Isso ocorre devido a definição do símbolo Delta de Kronecker<sup>1</sup>

$$\int_0^\pi V(a, \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = A_l a^l \frac{2}{2l+1} \quad (4.10)$$

Isolando  $A_l$  na equação (4.10), tem-se:

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi V(a, \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} V P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-V) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\} \\ A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:  $u = \cos \theta$ , tem-se  $-du = \sin \theta d\theta$ . Além disso, manipulando os intervalos de integração:

$$\begin{aligned} \cos 0 &\rightarrow u = 1 \\ \cos \pi &\rightarrow u = -1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow u = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Então é possível reescrever a equação (4.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ - \int_1^0 P_l(u) du + \int_0^{-1} P_l(u) du \right] \\ A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^1 P_l(u) du - \int_{-1}^0 P_l(u) du \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se  $l$  for par  $P_l(u)$  é par e conseqüentemente  $A_l = 0$ , esse é um resultado trivial, o qual não nos interessa nesse problema. Por outro lado, se  $l$  for ímpar  $P_l(u)$  é ímpar, então por propriedades de integrais de funções ímpares em um intervalo, nesse caso,  $[-1, 1]$ . Tem-se:

<sup>1</sup> Definição do símbolo Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_l(u) du &= 0 \\
\int_{-1}^0 P_l(u) du + \int_0^1 P_l(u) du &= 0 \\
\int_0^1 P_l(u) du &= -\int_{-1}^0 P_l(u) du
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo o resultado (4.13) em (4.12), tem-se:

$$\begin{aligned}
A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^1 P_l(u) du + \int_0^1 P_l(u) du \right] \\
A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} 2V \int_0^1 P_l(u) du \\
A_l &= \frac{2l+1}{a^l} V \int_0^1 P_l(u) du
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Para resolver a integral em (4.14), faz-se:

$$A_l = \frac{V}{a^l} \int_0^1 (2l+1) P_l(u) du \tag{4.15}$$

Para calcular os coeficientes é possível utilizar a equação (A.11) apresentada na subseção (A.0.3).

$$P'_{l+1}(u) - P'_{l-1}(u) = (2l+1)P_l(u)$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_l &= \frac{V}{a^l} \int_0^1 \{P'_{l+1}(u) - P'_{l-1}(u)\} du \\
A_l &= \frac{V}{a^l} \int_0^1 \{P'_{l+1}(u) - P'_{l-1}(u)\} du \\
A_l &= \frac{V}{a^l} \left[ P_{l+1}(u) - P_{l-1}(u) \right]_0^1 \\
A_l &= \frac{V}{a^l} [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)]
\end{aligned}$$

Sabendo que  $P_l(1) = 1$  para qualquer valor de  $l$  então:

$$A_l = \frac{V}{a^l} [1 - 1 - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)]$$

$$A_l = \frac{V}{a^l} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

No entanto, sabendo que para valores pares de  $l$  implica que  $A_l = 0$ . Então faz-se:  $l - s = 2s \rightarrow l = 2s + 1$ .

$$A_{2s+1} = \frac{V}{a^{2s+1}} [P_{2s}(0) - P_{2s+2}(0)]$$

$$A_{2s+1} = \frac{V}{a^{2s+1}} [P_{2s}(0) - P_{2(s+1)}(0)]$$

Então:

$$\begin{aligned} A_{2s+1} &= \frac{V}{a^{2s+1}} \left[ \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} - \frac{(-1)^{s+1} (2s+2)!}{2^{2s+2} [(s+1)!]^2} \right] \\ &= \frac{V}{a^{2s+1}} \left[ \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} - \frac{(-1)^s (-1) (2s+2) (2s+1) (2s)!}{2^{2s} 4 (s+1)^2 (s!)^2} \right] \\ &= \frac{V}{a^{2s+1}} \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left[ 1 + \frac{(2s+2)(2s+1)}{4(s+1)^2} \right] \\ &= \frac{V}{a^{2s+1}} \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left[ 1 + \frac{2(s+1)(2s+1)}{4(s+1)^2} \right] \\ &= \frac{V}{a^{2s+1}} \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left[ 1 + \frac{(2s+1)}{2(s+1)} \right] \\ &= \frac{V}{a^{2s+1}} \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left[ \frac{2s+2+2s+1}{2s+2} \right] \\ A_{2s+1} &= \frac{V}{a^{2s+1}} \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left[ \frac{4s+3}{2s+2} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sendo  $s$  somente um índice representativo, podemos tomar  $s = l$ , e então substituir o resultado (4.14) em (4.7).

Desse modo, tem-se a solução específica para esse problema, isto é, o potencial elétrico na região interior a casca esférica formada por dois hemisférios de potenciais elétricos de sinais opostos é dado por:

$$V(r, \theta) = V \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 a^{2l+1}} \left[ \frac{4l+3}{2l+2} \right] r^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \quad (4.17)$$

Expandindo alguns termos, verifica-se que

$$V(r, \theta) = V \left[ \frac{3r}{2a} P_1(\cos \theta) - \frac{7r^3}{8a^3} P_3(\cos \theta) + \frac{11r^5}{16a^5} P_5(\cos \theta) \dots \right] \quad (4.18)$$

Utilizando a equação (2.3) com o gradiente em coordenadas esféricas, tem-se:

$$\vec{E}(r, \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} V \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 a^{2l+1}} \left[ \frac{4l+3}{2l+2} \right] (2l+1) r^{2l} P_{2l+1}(\cos \theta) \hat{\mathbf{r}} - \sum_{l=0}^{\infty} V \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 a^{2l+1}} \left[ \frac{4l+3}{2l+2} \right] r^{2l} P'_{2l+1}(\cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.19)$$

Para auxiliar na discussão física dos resultados deste problema, foi plotado em Python o gráfico presente na Figura 10. As curvas deste gráfico são referentes à equação (4.17) para valores fixos de  $\theta$ . É relevante lembrar que o potencial elétrico calculado pela equação citada é referente a parte interna da esfera.

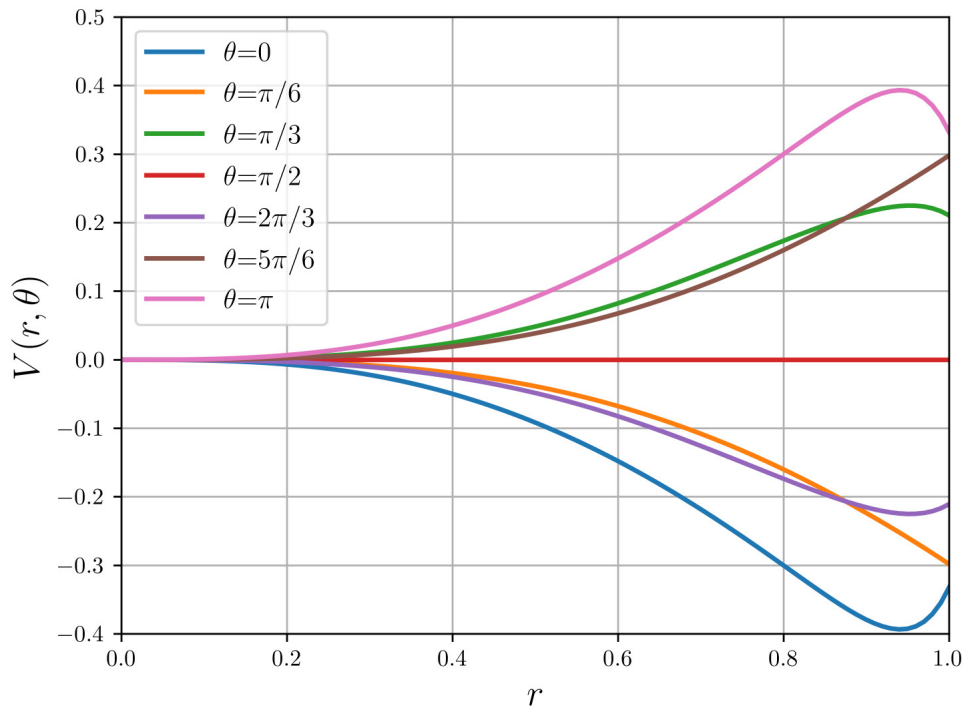


Figura 10 – Curvas do potencial elétrico na região interna da esfera completa. As curvas de potencial estão em dependência da coordenada esférica radial. Esta coordenada foi definida no Python de zero até o raio da esfera, o qual foi definido com valor 1.

De acordo com a Figura 10, nota-se o aumento do valor do potencial, em módulo, ao longo da coordenada radial. Ou seja, para a parte interna da esfera, o potencial aumenta seu valor proporcionalmente à aproximação da superfície da esfera. Esse aumento era esperado baseado no resultado teórico, devido a presença do termo  $r^{2l+1}$  na equação (4.17).

Além disso, nota-se na Figura 10 a dependência do potencial em relação a  $\theta$ , pois para cada valor angular, tem-se curvas distintas. É possível observar que, para  $\theta = 90^\circ$ , o potencial elétrico ao longo da direção equatorial da esfera é nulo, pois para esse valor angular os polinômios de Legendre de ordem ímpar são nulos. A explicação física para esse fenômeno é que a região

onde  $\theta = 90^\circ$  é o plano onde encontra-se o isolante de espessura muito pequena, e exatamente nessa região a superposição dos potenciais elétricos  $+V$  e  $-V$  de cada hemisfério resulta em um potencial elétrico nulo.

## 4.2 Problema 2: Paralelepípedo com as faces laterais aterradas

Esta é uma variante de um problema já resolvido presente na referência [5]. No problema original, a face de baixo do paralelepípedo está a um potencial elétrico nulo.

Para esse caso, tem-se um prisma de dimensões  $a, b$  e  $c$  nas respectivas direções  $x, y$  e  $z$ . A superfície em  $z = c$  está a um potencial elétrico  $U$  e a superfície em  $z = 0$  está a um potencial elétrico  $U'$ . As faces laterais do prisma estão todas aterradas, isto é, a um potencial elétrico nulo. Além disso, dentro do prisma não existem fontes de carga. Para ilustrar essa situação, tem-se a Figura 11.

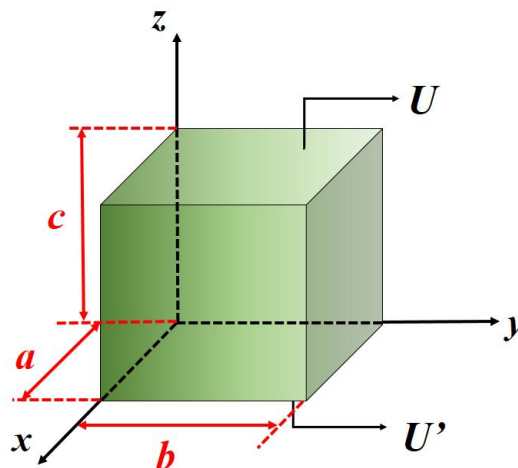


Figura 11 – Prisma com faces laterais aterradas e face superior a um potencial elétrico  $U$  e face inferior com um potencial elétrico  $U'$ . É importante destacar que, mesmo que a ilustração aparente ser um cubo, não necessariamente  $a = b = c$ .

Para iniciar, semelhante ao problema anterior, deve-se definir qual equação será utilizada para resolver esse problema, a equação de Laplace ou a equação de Poisson. Já sabe-se que a equação de Laplace é utilizada quando, na região onde pretende-se calcular o potencial elétrico, não existe distribuição de cargas elétricas, caso contrário, será utilizado a equação de Poisson.

Para esse problema, na região interior do prisma não há distribuição de cargas, então utiliza-se a equação de Laplace. Considerando a geometria do problema, convém utilizar o laplaciano em coordenadas cartesianas. Desse modo, tem-se:

$$\nabla^2 V(x, y, z) = 0$$

Como visto na subsecção (A.0.8), o laplaciano em coordenadas cartesianas tem solução geral dada pela equação (A.42), então:

$$V(x, y, z) = [C_1 \cos(\eta_x x) + C_2 \sin(\eta_x x)] [C_3 \cos(\eta_y y) + C_4 \sin(\eta_y y)] \times \\ \times [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z)] \quad (4.20)$$

Com base na Figura do problema e nas informações dadas inicialmente, é possível definir as seguintes condições de contorno para esse problema:

- Nas paredes do prisma, o potencial elétrico é nulo, pois estas faces estão ligadas a terra.  
Matematicamente:  $V(0, y, z) = V(a, y, z) = V(x, 0, z) = V(x, b, z) = 0$
- Na superfície superior do prisma, o potencial elétrico é  $U$ , por outro lado, na base do prisma, o potencial elétrico é  $U'$ .  
Matematicamente:  $V(x, b, c) = U$  e  $V(x, y, 0) = U'$

Agora, aplica-se as condições de contorno na solução geral. Primeiramente, a condição  $V(0, y, z) = 0$

$$V(0, y, z) = [C_1 \cos(\eta_x 0) + C_2 \sin(\eta_x 0)] \beta(y) \gamma(z) = 0$$

$$V(0, y, z) = C_1 \beta(y) \gamma(z) = 0 \quad (4.21)$$

Nota-se que, para a equação (4.21) ser satisfeita  $C_1$  deve ser nula, então impomos  $C_1 = 0$ . Desse modo, tem-se:

$$V(x, y, z) = [C_2 \sin(\eta_x x)] [C_3 \cos(\eta_y y) + C_4 \sin(\eta_y y)] \times \\ \times [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z)] \quad (4.22)$$

Aplicando a condição de contorno  $V(a, y, z) = 0$ , tem-se:

$$V(a, y, z) = [C_2 \sin(\eta_x a)] \beta(y) \gamma(z) = 0$$

Admitindo que  $C_2 \neq 0$ , pois não interessa a solução trivial, então  $\sin(\eta_x a) = 0$ . Para isso, o argumento da função seno deve ser um múltiplo de  $\pi$ , isto é:

$$\eta_x a = n\pi$$

$$\eta_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Então a equação para o potencial elétrico fica:

$$V(x, y, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) [C_3 \cos(\eta_y y) + C_4 \sin(\eta_y y)] \times \\ \times [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z)] \quad (4.23)$$

Aplicando a condição  $V(x, 0, z) = 0$ , tem-se:

$$V(x, 0, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) [C_3 \cos(\eta_y 0) + C_4 \sin(\eta_y 0)] \gamma(z) = 0$$

$$V(x, 0, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) C_3 \gamma(z) = 0 \quad (4.24)$$

Para a equação (4.24) ser satisfeita  $C_3$  deve ser nula, então:

$$V(x, y, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) C_4 \sin(\eta_y y) [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z)]$$

Aplicando a condição  $V(x, b, z) = 0$  verifica-se que

$$V(x, b, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) C_4 \sin(\eta_y b) \gamma(z) = 0$$

Sendo  $C_2 \neq 0$  e  $C_4 \neq 0$ , então,  $\sin(\eta_y b) = 0$ . Novamente, isso ocorre quando o argumento da função seno é um múltiplo de  $\pi$ .

$$\eta_y b = m\pi$$

$$\eta_y = \frac{m\pi}{b} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Então tem-se:

$$V(x, y, z) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) C_4 \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z)]$$

$$V(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[ C_5 \cosh\left([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z\right) + C_6 \sinh\left([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}z\right) \right] \quad (4.25)$$

Onde  $A = C_2C_4$ . Reescrevendo a equação (4.25), tem-se:

$$V_{nm}(x, y, z) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right) \right] \quad (4.26)$$

Para cada  $V_{nm}$ , temos uma autofunção do operador  $\nabla^2$ , o qual é um operador hermitiano, em consequência disso, os autovalores associados a esse operador são reais e as suas autofunções são ortogonais entre si. Devido a essa ortogonalidade, as autofunções do operador formam um conjunto completo de funções ortogonais que serve de base para um espaço vetorial. Desse modo, a solução mais geral possível é uma combinação linear dessas autofunções, nesse caso,  $V_{nm}$ , então tem-se:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm} \quad (4.27)$$

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right) \right]$$

Aplicando a condição de contorno  $V(x, y, 0) = U'$ , tem-se:

$$V(x, y, 0) = U' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}0\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}0\right) \right] \quad (4.28)$$

$$V(x, y, 0) = U' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_5 A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

Para encontrar  $C_5 A_{nm}$ , expande-se  $U'$  em uma série dupla de Fourier utilizando as condições de ortogonalidade das funções trigonométricas. Essas condições são apresentadas na subseção (A.0.5).

$$U' \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_5 A_{nm} \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \times \\ \times \int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \quad (4.29)$$

Resolvendo a integral  $\int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx$ , tem-se:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx = \left[ -\cos\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) \frac{a}{n'\pi} \right]_0^a \\ \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{n'\pi} [-\cos(n'\pi) + \cos 0] = \frac{a}{n'\pi} [1 - (-1)^{n'}] \quad (4.30)$$

Calculando alguns termos do resultado (4.30), verifica-se que

- Para  $n' = 1$  resulta  $2a/\pi$
- Para  $n' = 2$  resulta 0
- Para  $n' = 3$  resulta  $2a/3\pi$
- Para  $n' = 4$  resulta 0
- Para  $n' = 5$  resulta  $2a/5\pi$

Generalizando, é possível escrever  $\frac{a}{n'\pi} [1 - (-1)^{n'}] = \frac{2a}{(2n'-1)\pi}$  para  $n' = 1, 2, 3, \dots$  Desse modo, a integral resulta em:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx = \frac{2a}{(2n'-1)\pi}$$

Analogamente:

$$\int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) dy = \frac{2b}{(2m'-1)\pi}$$

Substituindo esses resultados em (4.29), tem-se:

$$U' \frac{2a}{(2n'-1)\pi} \frac{2b}{(2m'-1)\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_5 A_{nm} \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \times \\ \times \int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \quad (4.31)$$

Para resolver o lado direito da equação (4.31) utiliza-se as condições de ortogonalidade para funções trigonométricas, desse maneira, obtém-se o seguinte resultado:

$$U' \frac{2a}{(2n' - 1)\pi} \frac{2b}{(2m' - 1)\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_5 A_{nm} \frac{a}{2} \delta_{n'n} \frac{b}{2} \delta_{m'm}$$

Ao expandir os somatórios em  $m$  e  $n$ , sabe-se que, pela definição da delta de Kronecker, somente serão diferentes de zero os termos para índices  $n = n'$  e  $m = m'$ , então:

$$U' \frac{4ab}{(2n - 1)(2m - 1)\pi^2} = C_5 A_{nm} \frac{ab}{4}$$

$$\frac{16U'}{(2n - 1)(2m - 1)\pi^2} = C_5 A_{nm} \quad (4.32)$$

O resultado (4.32) será utilizado futuramente em um resultado que encontraremos aplicando a condição de contorno  $V(x, y, c) = U$ . Então, faz-se:

$$V(x, y, c) = U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times$$

$$\times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) \right] \quad (4.33)$$

Novamente, na equação (4.33) expande-se  $U$  em uma série dupla de Fourier.

$$U \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) \times$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \times \quad (4.34)$$

$$\times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) \right]$$

Resolvendo as integrais no lado esquerdo da igualdade e utilizando as condições de ortogonalidade para funções trigonométricas no lado direito da igualdade, chega-se em:

$$U \frac{4ab}{(2n' - 1)(2m' - 1)\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{a}{2} \delta_{n'n} \frac{b}{2} \delta_{m'm} \times$$

$$\times \left[ C_5 \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) + C_6 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c\right) \right] \quad (4.35)$$

Pelas propriedades de delta de Kronecker, tem-se:

$$\begin{aligned} & U \frac{4ab}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} = A_{nm} \frac{ab}{4} \times \\ & \times \left[ C_5 \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) + C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{16U}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} &= A_{nm} C_5 \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) + \\ &+ A_{nm} C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.32) na equação (4.37), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{16U}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} &= \frac{16U'}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) + \\ &+ A_{nm} C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Então:

$$\begin{aligned} A_{nm} C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) &= \frac{16U}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} - \frac{16U'}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \times \\ &\times \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$A_{nm} C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) = \frac{16 \left[ U - U' \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \right]}{(2n-1)(2m-1)\pi^2}$$

$$A_{nm} C_6 = \frac{16 \left[ U - U' \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right) \right]}{(2n-1)(2m-1)\pi^2 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \right)}$$

Retornando para a equação (4.27), podemos reescrever a mesma da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{b} y \right) \times \\ &\times \left[ A_{nm} C_5 \cosh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right) + A_{nm} C_6 \sinh \left( \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right) \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo os resultados encontrados para os coeficientes  $C_5A_{nm}$  e  $C_6A_{nm}$  na equação (4.40), tem-se a solução específica para o problema:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \left[ \frac{16U' \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right)}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} + \frac{16\left[U - U' \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c\right)\right] \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z\right)}{(2n-1)(2m-1)\pi^2 \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c\right)} \right] \quad (4.41)$$

Para otimizar os cálculos, façamos  $k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$ . Utilizando a relação (2.3) com o operador gradiente em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[ \frac{16U' \cosh(k_{nm}z)}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \right. \\ & \left. + \frac{16[U - U' \cosh(k_{nm}c) \sinh(k_{nm}z)]}{(2n-1)(2m-1)\pi^2 \sinh(k_{nm}c)} \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[ \frac{16U' \cosh(k_{nm}z)}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \right. \\ & \left. + \frac{16[U - U' \cosh(k_{nm}c) \sinh(k_{nm}z)]}{(2n-1)(2m-1)\pi^2 \sinh(k_{nm}c)} \right] \hat{\mathbf{j}} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[ \frac{16U' k_{nm} \sinh(k_{nm}z)}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \right. \\ & \left. + \frac{16[U - U' k_{nm} \cosh(k_{nm}c) \cosh(k_{nm}z)]}{(2n-1)(2m-1)\pi^2 \sinh(k_{nm}c)} \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para auxiliar na discussão física dos resultados deste problema, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 12. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.42). Note que, na equação citada consideramos um caso onde não necessariamente  $a = b = c$ , no entanto, para simplificar a plotagem do campo vetorial em Python, consideramos os lados do paralelepípedo iguais, com  $a = b = c = 4$ .

Observando as Figuras 10-b) e 10-c), é possível notar que o campo elétrico é perpendicular as superfícies laterais do paralelepípedo e esse fato é fisicamente coerente, pois as superfícies laterais do cubo são equipotenciais e estão a um potencial nulo. Isto é, não há projeção do campo elétrico nas superfícies laterais do cubo.

Além disso, de acordo com a Figura 10-b), nota-se que o campo elétrico é não uniforme na região entre a parte de baixo e a parte de cima do paralelepípedo, o que é de se esperar, pois, além dos valores do potencial em cada superfície serem distintos, o sinal de ambos os potenciais

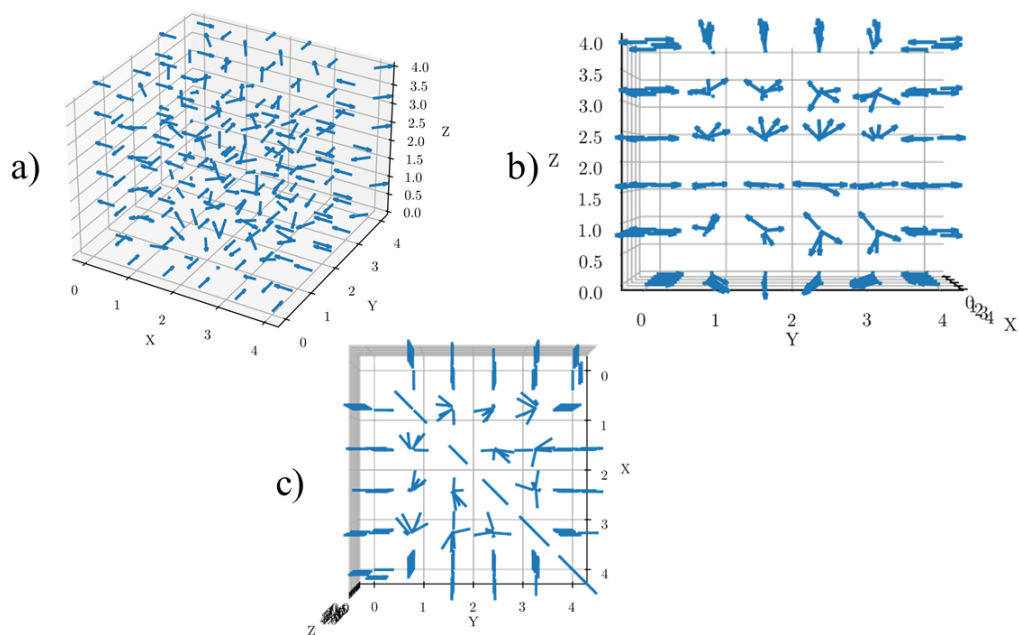


Figura 12 – Gráfico vetorial do cubo de lado 4 referente ao problema 2. a) Visão do campo elétrico na direção da diagonal principal do paralelepípedo. b) Visão frontal do campo elétrico. c) Visão da parte superior do paralelepípedo.

elétricos são iguais. Por outro lado, se os sinais do potencial elétrico nas superfícies de cima e de baixo fossem opostos e se  $U = U'$ , então seria esperado que o comportamento do campo elétrico interno ao cubo fosse semelhante ao de um capacitor de placas paralelas sem o preenchimento de um dielétrico.

Na Figura 10-c) é possível notar uma linha na direção diagonal do plano  $XY$ , essa linha de campo é devido a superposição do campo elétrico gerado por cada superfície não aterrada. Esses campos tendem a divergir em torno de uma reta assintótica, pois são campos gerados por superfícies de potenciais elétricos de mesmo sinal.

### 4.3 Problema 3: Cilindro com as bases aterradas e um potencial elétrico não nulo em sua superfície lateral

Esse problema encontra-se resolvido na referência [5]. Para esse problema, tem-se um cilindro de altura  $h$  e raio  $R$ . As bases, inferior e superior deste cilindro localizam-se nos planos  $z = 0$  e  $z = h$  respectivamente. As bases do cilindro estão aterradas e a superfície lateral do cilindro encontra-se a um potencial  $U_0$ . É desejado calcular o potencial elétrico em todos os pontos interiores ao cilindro. A Figura 13 ilustra esse problema.

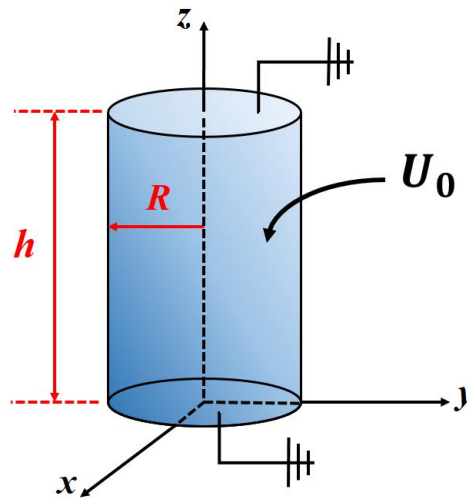


Figura 13 – Cilindro com as bases aterradas e potencial  $U_0$  na superfície lateral.

Para esse caso, utiliza-se a equação de Laplace, pois não existem cargas elétricas na região interior ao cilindro. Além disso, considerando a geometria do problema, é necessário expressar o operador laplaciano em coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

A solução do Laplaciano em coordenadas cilíndricas é dada pela equação (A.48) como apresentado na subseção (A.0.9).

$$V(\rho, \phi, z) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)][K_1 \cos(\lambda z) + K_2 \sin(\lambda z)]$$

As condições de contorno para esse problema são as seguintes:

- Na base inferior do cilindro, e também na face superior, o potencial elétrico é nulo, pois estas superfícies do cilindro estão ligadas a terra.

Matematicamente:  $V(\rho, \phi, 0) = V(\rho, \phi, h) = 0$ .

- Na superfície lateral do cilindro, o potencial elétrico tem valor igual a  $U_0$ .

Matematicamente:  $V(R, \phi, z) = U_0$ .

- No eixo vertical que passa pelo cilindro não existem fontes de cargas elétricas, então o potencial elétrico não deve divergir e deve ser finito nessa região.

Matematicamente:  $V(\rho = 0, \phi, z)$  não deve divergir.

Aplicando a condição de contorno  $V(\rho, \phi, 0) = 0$ , tem-se:

$$V(\rho, \phi, 0) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)] \times [K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] = 0 \quad (4.43)$$

$$V(\rho, \phi, 0) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)][K_1] = 0 \quad (4.44)$$

Nota-se que a equação (4.44) somente é satisfeita se impormos a condição de que  $K_1 = 0$ .  
Então:

$$V(\rho, \phi, z) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)]K_2 \sin(\lambda z)$$

Aplicando a condição  $V(\rho, \phi, h) = 0$ , tem-se:

$$V(\rho, \phi, h) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)]K_2 \sin(\lambda h) = 0$$

Assumindo  $K_2 \neq 0$  então a equação somente será verdadeira se  $\sin(\lambda h) = 0$ . Para isso, o argumento da função seno deve ser múltiplo de  $\pi$ . Então:

$$\lambda h = k\pi$$

$$\lambda = \frac{k\pi}{h} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Então, tem-se o seguinte:

$$V(\rho, \phi, z) = [K_5 J_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right) + K_6 N_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)]K_2 \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right)$$

Aplicando a condição de que o potencial elétrico deve ser finito em  $\rho = 0$ , tem-se:

$$V(0, \phi, z) = [K_5 J_n(0) + K_6 N_n(0)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)]K_2 \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right)$$

Pelas propriedades de funções de Bessel apresentadas na subseção (A.0.7),  $J_n(0) = 0$  e  $N_n$  é singular na origem, isto é,  $N_n(0) \rightarrow \infty$ . Para evitar esse crescimento indefinido do potencial elétrico em  $\rho = 0$ , deve-se impor que  $K_6$  seja nula. Desse modo, tem-se:

$$V(\rho, \phi, z) = K_5 J_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right) K_2 \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) [K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)]$$

$$V(\rho, \phi, z) = J_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right) \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) [K_3 K_5 K_2 \cos(n\phi) + K_4 K_5 K_2 \sin(n\phi)]$$

O produto entre as constantes resulta em outras constantes, que podemos representar por  $A$  e  $B$ . Então:

$$V(\rho, \phi, z) = J_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right) \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) [A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi)]$$

Nota-se que, para cada valor de  $n$  e de  $k$ , tem-se uma possível solução, então de maneira mais geral, é possível reescrever essa solução como uma combinação linear.

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{k\pi}{h}\rho\right) \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) [A_{nk} \cos(n\phi) + B_{nk} \sin(n\phi)] \quad (4.45)$$

Aplicando, por fim, a condição de contorno  $V(R, \phi, z) = U_0$ , faz-se:

$$V(R, \phi, z) = U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{k\pi}{h}R\right) \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) [A_{nk} \cos(n\phi) + B_{nk} \sin(n\phi)]$$

$$V(R, \phi, z) = U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) \left[ A_{nk} J_n\left(\frac{k\pi}{h}R\right) \cos(n\phi) + B_{nk} J_n\left(\frac{k\pi}{h}R\right) \sin(n\phi) \right]$$

Para facilitar os cálculos, é possível definir os seguintes coeficientes:

$$C_{nk} = A_{nk} J_n \left( \frac{k\pi}{h} R \right) \quad (4.46)$$

$$D_{nk} = B_{nk} J_n \left( \frac{k\pi}{h} R \right) \quad (4.47)$$

Note que a definição dos termos (4.46) e (4.47) acima como coeficientes é possível pois está fixado um valor para  $\rho$ , isto é,  $\rho = R$ . Por outro lado, note que a forma destes coeficientes depende somente dos parâmetros  $n$  e  $k$ . Substituindo os mesmos na expansão do potencial elétrico, verifica-se que

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( \frac{k\pi}{h} z \right) [C_{nk} \cos(n\phi) + D_{nk} \sin(n\phi)] \quad (4.48)$$

Para encontrar o coeficiente  $C_{nk}$  na equação (4.48), expande-se o potencial  $U_0$  em uma série dupla de Fourier utilizando as relações de ortogonalidade das funções trigonométricas, então:

$$\begin{aligned} U_0 \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi \int_0^h \sin \left( \frac{q\pi}{h} z \right) dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi \times \\ &\times \int_0^h \sin \left( \frac{q\pi}{h} z \right) \sin \left( \frac{k\pi}{h} z \right) dz [C_{nk} \cos(n\phi) + D_{nk} \sin(n\phi)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Distribuindo as integrais da equação (4.49) no lado direito da equação resulta em um membro direito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{nk} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(p\phi) d\phi \int_0^h \sin \left( \frac{q\pi}{h} z \right) \sin \left( \frac{k\pi}{h} z \right) dz + \\ D_{nk} \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) \sin(n\phi) d\phi \int_0^h \sin \left( \frac{q\pi}{h} z \right) \sin \left( \frac{k\pi}{h} z \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Considerando a condição de ortogonalidade dada pela equação (A.19), tem-se:

$$C_{nk} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(p\phi) d\phi \int_0^h \sin \left( \frac{q\pi}{h} z \right) \sin \left( \frac{k\pi}{h} z \right) dz$$

Consequentemente, a equação (4.45) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 U_0 \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi \int_0^h \sin\left(\frac{q\pi}{h}z\right) dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(p\phi) d\phi \times \\
 &\times \int_0^h \sin\left(\frac{q\pi}{h}z\right) \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) dz
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Nota-se que é possível escrever:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos[(n=0)\phi] \cos(p\phi) d\phi = \frac{2\pi}{2} \delta_{0p} \tag{4.52}$$

Pela equação (4.52), nota-se que devemos impor  $n = 0$  em nossa solução. Além disso, pelas condições de ortogonalidade das funções trigonométricas, tem-se:

$$U_0 \frac{2\pi}{2} \delta_{0p} \int_0^h \sin\left(\frac{q\pi}{h}z\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \frac{2\pi}{2} \delta_{np} \frac{h}{2} \delta_{qk} \tag{4.53}$$

Visto que, não deseja-se um resultado trivial do tipo  $0 = 0$ , o membro esquerdo da equação (4.53) somente é diferente de zero se o índice  $p = 0$  e o membro direito da igualdade somente é diferente de zero se  $p = n$  e  $q = k$ . Então:

$$\begin{aligned}
 U_0 \frac{2\pi}{2} \int_0^h \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) dz &= C_{0k} \frac{2\pi}{2} \frac{h}{2} \\
 U_0 \int_0^h \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) dz &= C_{0k} \frac{h}{2} \\
 \frac{2U_0}{h} \int_0^h \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right) dz &= C_{0k}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Devido termos exigido  $n = 0$ , o coeficiente  $C$  somente depende de  $k$ . Além disso, resolvendo a integral no membro esquerdo da equação (4.54) por substituição simples, tem-se:

$$\int_0^h \sin\left(\frac{k\pi}{h}x\right) dx = \frac{-h}{k\pi} [(-1)^k - 1]$$

Calculando o resultado da integral para os primeiros valores de  $k$ , lembrando que ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), tem-se:

- Para  $k = 1$ , resulta  $2h/\pi$
- Para  $k = 2$ , resulta  $0$
- Para  $k = 3$ , resulta  $2h/3\pi$

- Para  $k = 4$ , resulta  $0\pi$
- Para  $k = 5$ , resulta  $2h/5\pi$

Generalizando o resultado pra diferentes valores de  $k$ , tem-se:

$$\frac{-h}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \frac{2h}{(2k-1)\pi}$$

No entanto, o parâmetro  $k$  pode ser escrito da seguinte forma  $k = 2l + 1$ , onde ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Com esses resultados, conclui-se que o coeficiente tem a forma:

$$C_{2l+1} = \frac{2U_0}{h} \frac{2h}{(2l+1)\pi}$$

$$C_{2l+1} = \frac{4U_0}{(2l+1)\pi}$$

Desse modo, através da igualdade (4.46), observa-se que:

$$\frac{4U_0}{(2l+1)\pi} = A_{2l+1} J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} R \right)$$

$$\frac{4U_0}{(2l+1)\pi J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} R \right)} = A_{2l+1} \quad (4.55)$$

Substituindo o resultado (4.55) em (4.45) e lembrando que exigimos  $n = 0$  e  $k = 2l + 1$ , tem-se:

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} \rho \right) \sin \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} z \right) \times \left\{ \frac{4U_0}{(2l+1)\pi J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} R \right)} \cos 0 + B_{nk} \sin 0 \right\} \quad (4.56)$$

Note que, o fato de  $n$  ser zero anula o coeficiente  $B_{nk}$  na equação (4.56) pois  $\sin 0 = 0$ . Sendo assim, não devemos nos preocupar em calcular este coeficiente. Então, a solução específica para este problema é dada pela equação (4.57)

$$V(\rho, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4U_0}{(2l+1)\pi J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} R \right)} J_0 \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} \rho \right) \sin \left( \frac{(2l+1)\pi}{h} z \right) \quad (4.57)$$

Para encontrar o campo elétrico deste problema, utiliza-se a relação (2.3), para o gradiente em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (4.58)$$

Substituindo (4.57) na equação (4.58), tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho, z) = & -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4U_0}{(2l+1)\pi J_0\left(\frac{(2l+1)\pi R}{h}\right)} J_0'\left(\frac{(2l+1)\pi}{h}\rho\right) \sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{h}z\right) \hat{\rho} \\ & - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4U_0}{h J_0\left(\frac{(2l+1)\pi R}{h}\right)} J_0\left(\frac{(2l+1)\pi}{h}\rho\right) \cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{h}z\right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para auxiliar na discussão física dos resultados deste problema, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 14. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.59). Para plotar o campo vetorial deste problema foi definido do raio do cilindro com valor 2.

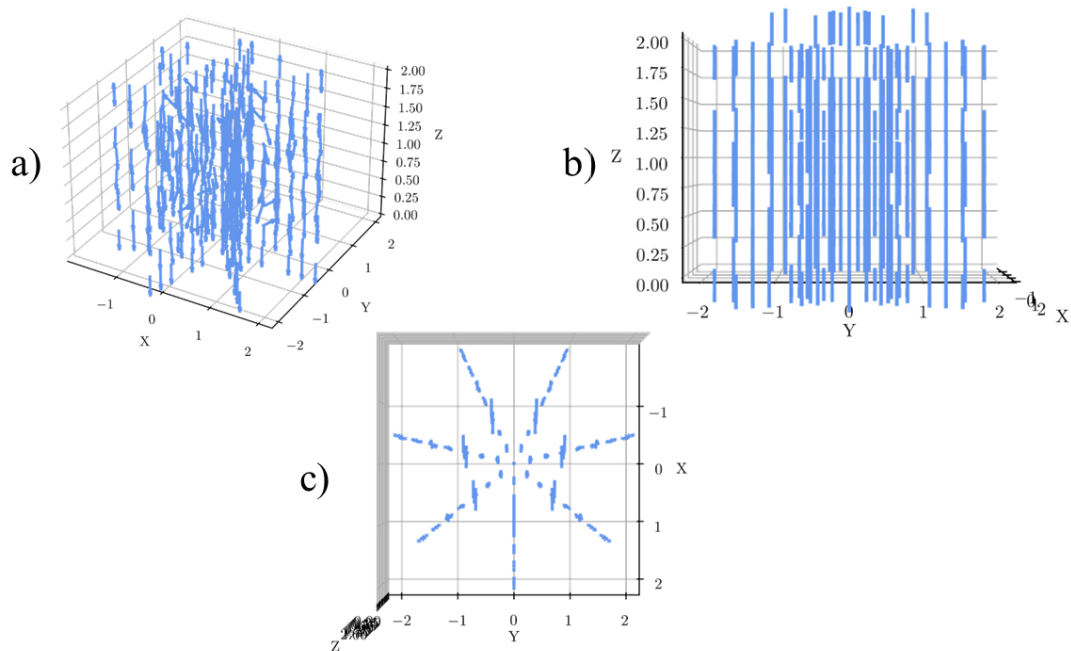


Figura 14 – Gráfico vetorial do cilindro de raio 2 referente ao problema 3. a) Visão padrão do campo elétrico. b) Visão frontal do campo elétrico interno ao cilindro. c) Visão da parte superior do cilindro.

Observando a Figura 12-a) é possível identificar visualmente um comportamento oscilatório no campo elétrico na direção  $z$ . Esse comportamento é esperado devido ao termo  $\cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{h}z\right)$  do campo elétrico de acordo com a equação (4.59). Além disso, ao analisar a Figura 12-c) é possível notar que o campo elétrico para esse problema é independente do ângulo  $\phi$ , revelando a simetria azimutal.

## 4.4 Problema 4: Esfera sujeita a um campo magnético uniforme

Este problema é o exercício proposto 2.7 da referência [5]. Uma esfera com raio  $R$  e permeabilidade magnética  $\mu$ , é colocada no vácuo onde existe um campo magnético uniforme  $\vec{H}$ . Calcular o campo magnético resultante, após a imersão da esfera, na região interna e externa da mesma. A Figura 15 é apresentada com o objetivo de ilustrar o problema descrito acima.

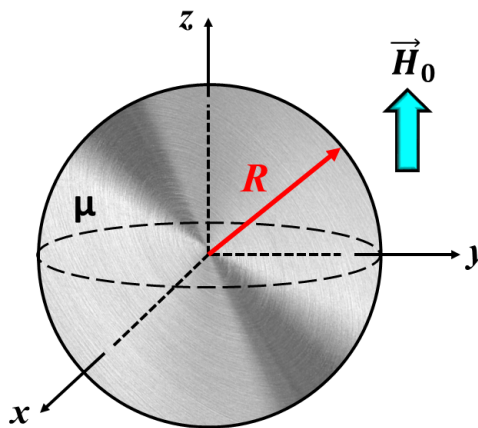


Figura 15 – Esfera em um campo magnético uniforme  $\vec{H}_0$ .

As condições de contorno listadas abaixo são fornecidas pelo próprio livro [5].

- A função que descreve o potencial magnético escalar deve ser contínua na superfície da esfera.

Matematicamente:  $U(R)_{Dentro} = U(R)_{Fora}$

- Na superfície da esfera  $r = R$ , a derivada radial da função potencial deve ser contínua, obedecendo a seguinte relação:  $\mu \left[ \frac{\partial U_{Dentro}}{\partial r} \right]_R = \left[ \frac{\partial U_{Fora}}{\partial r} \right]_R$
- Para  $r \gg R$ , o potencial magnético deve ter a forma  $U(r \gg R, \theta) = -H_0 r \cos \theta$

Para esse problema, convém utilizar coordenadas esféricas, devido a geometria da situação analisada. Além disso, assim como é apresentado na Figura 15, devido a escolha de um referencial onde a origem coincide com o centro da esfera, nota-se a presença de simetria azimutal, isto é, o potencial escalar magnético não deve depender da coordenada  $\phi$ .

Para resolver este problema, será utilizado o método do potencial escalar magnético. Sabendo que a esfera não está exposta a nenhum campo elétrico, então partindo da lei de Ampère-Maxwell dada pela equação (2.9), observa-se que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Onde  $\vec{J}$  é a densidade de **corrente de magnetização** superficial da esfera. Por outro lado, no problema que está sendo resolvido não existe corrente de magnetização na superfície da esfera, então  $\vec{J} = \vec{0}$ . Conseqüentemente,  $\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$  então é possível escrever  $\vec{H} = -\nabla U$ . Onde  $U$ , nesse caso, é o potencial magnético escalar, semelhante ao potencial elétrico escalar visto em problemas anteriores.

Nota-se ainda que, existe a seguinte relação entre  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  para materiais que possuem comportamento linear, isotrópico e homogêneo  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material, nesse caso, a esfera. No entanto, para o caso que está sendo apresentado, tem-se:

$$\vec{B} = \mu(-\nabla U) = -\nabla(\mu U)$$

Por outro lado, de acordo com a equação (2.8), então:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot [-\nabla(\mu U)] = 0 \\ \nabla \cdot [-\nabla(\mu U)] &= -\mu \nabla^2 U = 0 \\ \nabla^2 U &= 0 \end{aligned}$$

Devido a geometria esférica do problema e sua simetria azimutal, a equação (4.60) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 U(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.60)$$

A solução do laplaciano na equação (4.63) é dada pela equação (A.60), como visto na subseção (A.0.10), então:

$$U(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ A_j r^j + B_j r^{-(j+1)} \right] [C_j P_j(\cos \theta) + D_j Q_j(\cos \theta)]$$

Como queremos uma solução para todo o espaço que permeia a esfera, então esta solução deve ser bem comportada dentro e fora da esfera quando  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , pois assume-se que não existem fontes ou sumidouros de campos magnéticos dentro e fora da esfera.

Porém, assim como apresentado na subseção (A.0.3), note que a função  $Q_j$  diverge quando seu argumento é  $\pm 1$ , ou seja, diverge para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ .

Dessa forma, devemos impor  $D_j = 0$  para que a solução  $U(r, \theta)$  seja bem comportada. Então, o potencial escalar magnético fica:

$$U(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ A_j r^j + B_j r^{-(j+1)} \right] P_j(\cos \theta) \quad (4.61)$$

Note que a constante  $C_l$  pode ser englobada pelas demais constantes. O potencial dentro da esfera varia radialmente de 0 a  $R$ , então a solução do potencial para dentro da esfera fica:

$$U_D = U(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j r^j P_j(\cos \theta)$$

Além disso, deve ser imposto que  $B_j$  seja nulo dentro da esfera para evitar divergências quando  $r = 0$ . Por outro lado, para o campo fora da esfera a solução deve possuir os dois termos radiais, no entanto, utiliza-se diferentes coeficientes para obtermos uma solução mais geral.

$$U_F = U(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ C_j r^j + D_j r^{-(j+1)} \right] P_j(\cos \theta)$$

Fazendo as derivadas para as soluções dentro e fora da esfera, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_D}{\partial r} &= \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} = \sum_{j=1}^{\infty} j A_j r^{j-1} P_j(\cos \theta) \\ \frac{\partial U_F}{\partial r} &= \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ j C_j r^{j-1} - (j+1) \frac{D_j}{r^{j+2}} \right] P_j(\cos \theta) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno da continuidade do potencial magnético na superfície da esfera, isto é, em  $r = R$ , tem-se:

$$U_F(R) = U_D(R) \quad (4.62)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j R^j P_j(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ C_j R^j + \frac{D_j}{R^{(j+1)}} \right] P_j(\cos \theta) \quad (4.63)$$

Da igualdade (4.63), conclui-se que:

$$A_j R^j = C_j R^j + \frac{D_j}{R^{(j+1)}} \quad (4.64)$$

$$A_j R^{2j+1} = C_j R^{2j+1} + D_j \quad (4.65)$$

Utilizando a condição de contorno da continuidade na derivada radial do potencial, tem-se:

$$\mu \left[ \frac{\partial U_{Dentro}}{\partial r} \right]_R = \left[ \frac{\partial U_{Fora}}{\partial r} \right]_R \quad (4.66)$$

$$\mu \sum_{j=1}^{\infty} [jA_j R^{j-1}] P_j(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ jC_j R^{j-1} - (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} \right] P_j(\cos \theta) \quad (4.67)$$

Para juntar os somatórios, deve-se expandir o somatório à direita da igualdade na equação (4.67), para que o mesmo inicie de  $j = 1$ .

$$\begin{aligned} \mu \sum_{j=1}^{\infty} [jA_j R^{j-1}] P_j(\cos \theta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ jC_j R^{j-1} - (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} \right] P_j(\cos \theta) - \frac{D_0}{R^2} \\ 0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu jA_j R^{j-1} P_j(\cos \theta) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[ jC_j R^{j-1} - (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} \right] P_j(\cos \theta) + \frac{D_0}{R^2} \\ 0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \mu jA_j R^{j-1} - jC_j R^{j-1} + (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} \right] P_j(\cos \theta) + \frac{D_0}{R^2} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Da equação (4.68) conclui-se que  $D_0 = 0$ . Além disso, tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \mu jA_j R^{j-1} - jC_j R^{j-1} + (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} &= 0 \\ \mu jA_j R^{j-1} &= jC_j R^{j-1} - (j+1) \frac{D_j}{R^{j+2}} \\ \mu \frac{jA_j R^{2j+1}}{(j+1)} &= \frac{jC_j R^{2j+1}}{(j+1)} - D_j \end{aligned} \quad (4.69)$$

Somando a equação (4.69) com (4.65), tem-se:

$$\begin{aligned} A_j R^{2j+1} + \mu \frac{jA_j R^{2j+1}}{(j+1)} &= \frac{jC_j R^{2j+1}}{(j+1)} - D_j + C_j R^{2j+1} + D_j \\ A_j R^{2j+1} + \mu \frac{jA_j R^{2j+1}}{(j+1)} &= \frac{jC_j R^{2j+1}}{(j+1)} + C_j R^{2j+1} \\ A_j + \mu \frac{jA_j}{(j+1)} &= \frac{jC_j}{(j+1)} + C_j \\ A_j \left[ 1 + \frac{\mu j}{(j+1)} \right] &= C_j \left[ 1 + \frac{j}{(j+1)} \right] \\ A_j \frac{(j+1 + \mu j)}{(j+1)} &= C_j \frac{(2j+1)}{(j+1)} \\ A_j (j+1 + \mu j) &= C_j (2j+1) \\ A_j \frac{[j(1 + \mu) + 1]}{(2j+1)} &= C_j \end{aligned} \quad (4.70)$$

Substituindo o resultado (4.70) em (4.65), tem-se:

$$\begin{aligned}
 A_j R^{2j+1} &= A_j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} R^{2j+1} + D_j \\
 A_j R^{2j+1} - A_j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} R^{2j+1} &= D_j \\
 A_j R^{2j+1} \left[ 1 - \frac{j(1+\mu)+1}{(2j+1)} \right] &= \\
 A_j R^{2j+1} \left[ \frac{2j+1-j-\mu j-1}{(2j+1)} \right] &= \\
 A_j R^{2j+1} \left[ \frac{j-\mu j}{(2j+1)} \right] &= \\
 A_j R^{2j+1} j \frac{(1-\mu)}{(2j+1)} &= D_j
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados encontrados de  $C_j$  e  $D_j$  na solução geral para o potencial magnético fora da esfera, observa-se que:

$$U(r, \theta)_F = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ A_j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} r^j + A_j R^{2j+1} j \frac{(1-\mu)}{(2j+1)r^{j+1}} \right] P_j(\cos \theta) \quad (4.71)$$

$$U(r, \theta)_F = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left[ \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} r^j + \frac{j(1-\mu)R^{2j+1}}{(2j+1)r^{j+1}} \right] P_j(\cos \theta) \quad (4.72)$$

Utilizando a condição de contorno do comportamento do potencial magnético para  $r \gg R$ , tem-se:

$$U(r \gg R, \theta)_F = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left[ \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} r^j \right] P_j(\cos \theta) = -H_0 r \cos \theta$$

Sabendo que  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$  e utilizando as condições de ortogonalidade do polinômio de Legendere vistas na subseção (A.0.4), faz-se:

$$\begin{aligned}
 -H_0 r \int_0^{\pi} P_1(\cos \theta) P_{j'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j r^j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} \times \\
 &\times \int_0^{\pi} P_j(\cos \theta) P_{j'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta
 \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$-H_0 r \frac{2}{2j'+1} \delta_{1j'} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j r^j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} \frac{2}{2j'+1} \delta_{jj'} \quad (4.74)$$

Ao expandir o somatório, pela definição da delta de Kronecker, somente resultará em um termo não nulo quando  $j = j'$ , então:

$$-H_0 r \frac{2}{2j'+1} \delta_{1j'} = A_j r^{j'} \frac{[j'(1+\mu)+1]}{(2j'+1)} \frac{2}{2j'+1} \quad (4.75)$$

Ainda pela definição da delta de Kronecker, no lado esquerdo da igualdade na equação (4.75), somente haverão termos não nulos quando  $j' = 1$ . Então devemos impor  $j' = 1$ , pois  $j' \neq 1$  resulta em  $A_{j'} = 0$ .

$$\begin{aligned} -H_0 r \frac{2}{3} &= A_1 r \frac{(2+\mu) 2}{3} \frac{2}{3} \\ -H_0 &= A_1 \frac{2+\mu}{3} \\ A_1 &= \frac{-3H_0}{(2+\mu)} \end{aligned}$$

Utilizando a relação  $A_j R^{2j+1} j \frac{(1-\mu)}{(2j+1)} = D_j$  com  $j = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} A_1 R^{2 \cdot 1 + 1} \cdot 1 \frac{(1-\mu)}{(2 \cdot 1 + 1)} &= D_1 \\ A_1 R^3 \frac{(1-\mu)}{3} &= \\ \frac{-3H_0}{(2+\mu)} R^3 \frac{(1-\mu)}{3} &= \\ \frac{H_0 R^3 (\mu - 1)}{(2+\mu)} &= D_1 \end{aligned}$$

Da equação relação  $A_j \frac{[j(1+\mu)+1]}{(2j+1)} = C_j$  para  $j = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 \frac{(2+\mu)}{3} \\ C_1 &= \frac{-3H_0}{(2+\mu)} \frac{(2+\mu)}{3} \\ C_1 &= -H_0 \end{aligned}$$

Se somente o termo de índice 1 permanece nas soluções para fora e para dentro da esfera, então:

$$U_D = A_1 r^1 P_1(\cos \theta) = A_1 r \cos \theta$$

$$U_D(r, \theta) = \frac{-3H_0 r}{(2+\mu)} \cos \theta \quad (4.76)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
 U_F &= \left[ C_1 r^1 + \frac{D_1}{r^2} \right] P_1(\cos \theta) \\
 U_F(r, \theta) &= \left[ -H_0 r + \frac{-3H_0}{(2+\mu)} R^3 \frac{(1-\mu)}{3} \frac{1}{r^2} \right] \cos \theta \\
 U_F(r, \theta) &= -H_0 r \cos \theta + H_0 \frac{(\mu-1) R^3}{(2+\mu) r^2} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

As expressões (4.76) e (4.77) descrevem o comportamento do potencial magnético nas regiões dentro e fora da esfera, respectivamente. Para encontrar o campo  $\vec{H}$  nas respectivas regiões, utiliza-se a relação  $\vec{H} = -\nabla U$ . Lembrando que o gradiente de um campo escalar  $U$  em coordenadas esféricas é dado por:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

No entanto, o potencial fora e dentro da esfera não devem depender da coordenada  $\phi$  devido a simetria azimutal do problema. Então, para o campo dentro da esfera, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_D &= -\nabla U_D = \frac{\partial U_D}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_D}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 \vec{H}_D &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{-3H_0 r}{(2+\mu)} \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{-3H_0 r}{(2+\mu)} \cos \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 \vec{H}_D &= \frac{3H_0}{(2+\mu)} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3H_0}{(2+\mu)} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Fazendo  $|\vec{H}_D|$ , tem-se a intensidade do campo magnético no interior da esfera:

$$\begin{aligned}
 |\vec{H}_D| &= \sqrt{\left[ \frac{3H_0}{(2+\mu)} \cos \theta \right]^2 + \left[ -\frac{3H_0}{(2+\mu)} \sin \theta \right]^2} \\
 |\vec{H}_D| &= \frac{3H_0}{(2+\mu)} \sqrt{[\cos \theta]^2 + [\sin \theta]^2} \\
 |\vec{H}_D| &= \frac{3H_0}{(2+\mu)}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

O resultado apresentado na equação (4.79) indica que o campo  $\vec{H}$  dentro da esfera é constante. Para o campo fora da esfera, observa-se que:

$$\vec{H}_F = -\nabla U_F = \frac{\partial U_F}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_F}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Utilizando a equação (4.77), tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{H}_F = \frac{\partial}{\partial r} \left[ -H_0 r \cos \theta + H_0 \frac{(\mu - 1) R^3}{(2 + \mu) r^2} \cos \theta \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -H_0 r \cos \theta + H_0 \frac{(\mu - 1) R^3}{(2 + \mu) r^2} \cos \theta \right] \hat{\theta} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\vec{H}_F = H_0 \cos \theta \left[ 1 + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 \frac{(\mu - 1)}{(\mu + 2)} \right] \hat{r} - H_0 \sin \theta \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \frac{(\mu - 1)}{(\mu + 2)} \right] \hat{\theta} \quad (4.81)$$

Para auxiliar na discussão física do campo interno à esfera nesse caso, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 16. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.78).

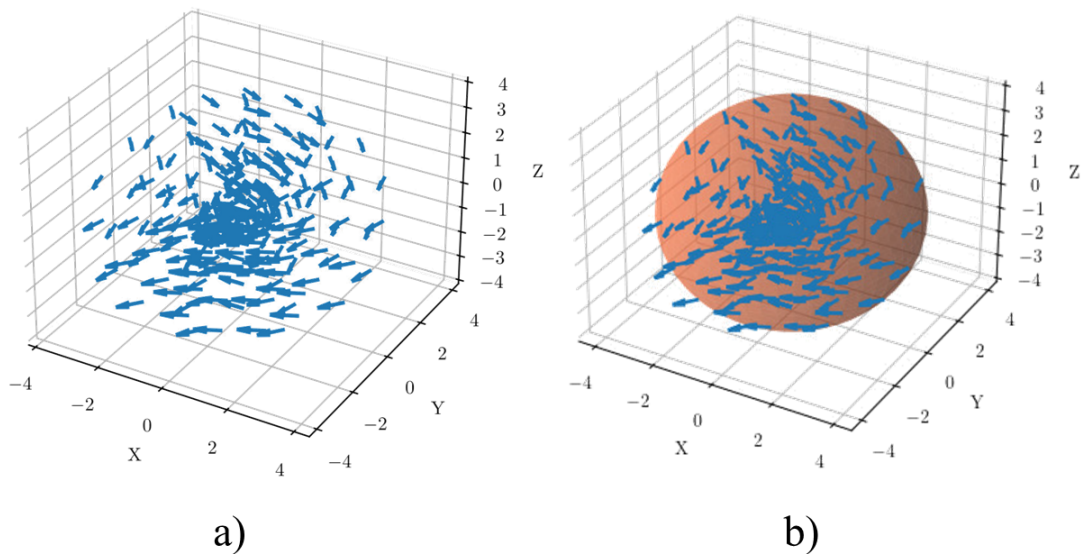


Figura 16 – Gráfico do campo vetorial para a região interna da esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície da esfera. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica.

Observa-se que o campo magnético dentro da esfera tem intensidade constante, apesar de variar em direção e sentido, devido às suas componentes nas direções  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  (veja as equações (4.78) e (4.79)). Esse campo apresenta essencialmente simetria esférica. Os vetores que aparentemente apontam para fora ou que não parecem obedecer esta simetria, na verdade a obedecem. Eles têm sua origem partindo dos pontos da rede 3D esférica e em cada ponto o campo vetorial terá uma direção e sentido, apesar do módulo ser o mesmo. É possível observar que o campo é muito sensível à variação angular na direção  $\theta$ , pois ela pode inverter o sinal dos termos  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , curvando o campo vetorial e invertendo direções.

Por outro lado, para auxiliar na discussão física do campo externo para esse caso, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 17. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.81).

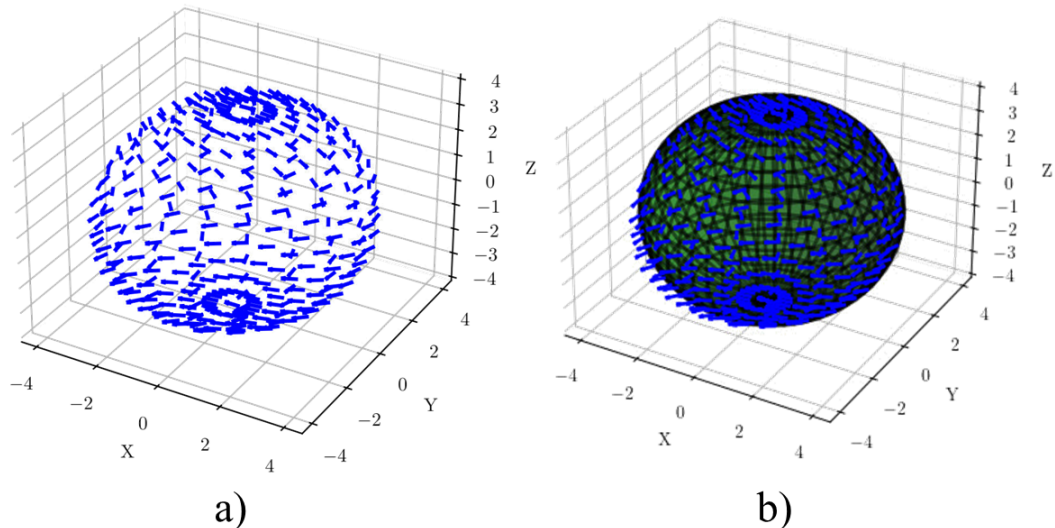


Figura 17 – Gráfico do campo vetorial na região externa a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica.

Na Figura 17, foi construída uma malha de pontos no espaço 3D em coordenadas esféricas, de maneira que na direção radial haja apenas uma camada de pontos sobre os quais se calcula o campo magnético. O efeito é mostrar o campo imediatamente sobre a superfície da esfera. Essa abordagem torna a visualização do campo magnético mais nítida do que a representação do campo vetorial interno, onde os pontos do *grid* 3D preenchem todo o volume. Mais uma vez, observa-se a sensibilidade do campo às direções de  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ . Diferentemente do campo interno, esse campo decai com a distância, atingindo um valor terminal  $\|\vec{H}_F\| = H_0$  para grandes distâncias. Apesar da semelhança com um campo eletrodinâmico, devido a uma componente radial que diverge e uma componente angular que circula, este campo é estático, pois não tem dependência temporal explícita.

## 4.5 Problema 5: Esfera, em rotação, com densidade superficial de cargas

Este é um exemplo resolvido da referência [11]. Parafraseando, o comando do exemplo trata de uma casca esférica de raio  $D$  e densidade uniforme de cargas elétricas  $\sigma$ , a qual é posta para girar com velocidade angular constante  $\omega$ . Devemos encontrar o potencial vetor magnético para uma posição arbitrária  $\vec{r}$  dentro e fora da esfera. Para ilustrar este problema, tem-se a Figura 18.

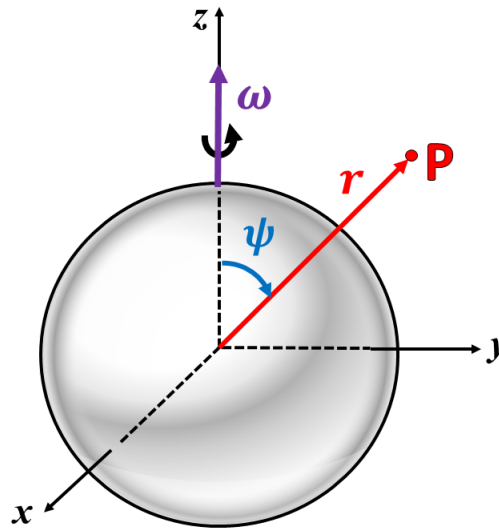


Figura 18 – Casca esférica com densidade de cargas  $\sigma$  girando em torno do eixo  $z$ . Note que,  $\omega$  coincide com a direção  $z$ .

No entanto, para facilitar os cálculos desloca-se angularmente o eixo de rotação da casca de maneira que ele fique no plano  $XZ$  fazendo um ângulo  $\psi$  com a direção  $z$ . Além disso, essa ação faz com que o vetor posição  $\vec{r}$  coincida com a direção  $z$ . Para ilustrar esse nova configuração, tem-se a Figura 19.

Pela equação de Maxwell  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , podemos escrever o campo  $\vec{B}$  como o rotacional de um outro vetor, o qual chama-se de potencial vetor magnético. Então:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Com base na Lei de Ampère em sua forma integral, sabe-se que, para o caso de um campo gerado por uma distribuição superficial de cargas em movimento, tem-se:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS \quad (4.82)$$

Por outro lado, utilizando a identidade:

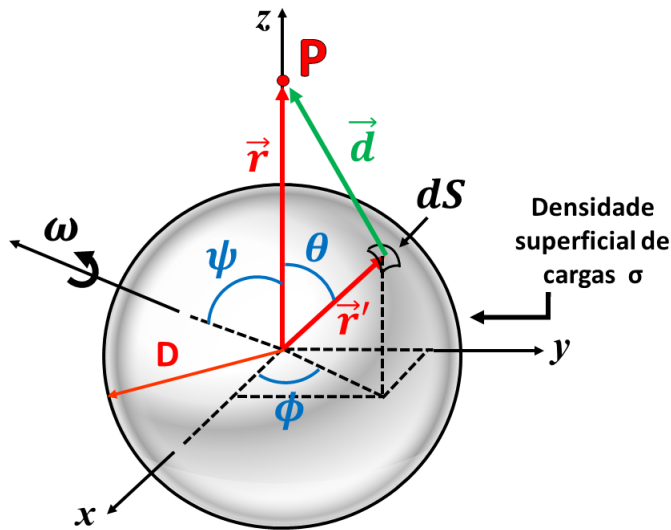


Figura 19 – Esfera com densidade superficial de cargas  $\sigma$  rotacionando em torno de um eixo com velocidade angular constante  $\omega$ .

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

É possível escrever:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \vec{J}(\vec{r}') \times -\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dS \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \end{aligned} \quad (4.83)$$

Comparando a equação (4.83) com a relação  $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ , conclui-se que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \quad (4.84)$$

Sabendo que a geometria do problema é esférica, deve-se adaptar a integral em (4.84) às coordenadas do problema. O diferencial de superfície em coordenadas esféricas, para esse caso, é dado por  $dS = D^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Além disso, sabe-se que  $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{d}| = d$ , então pela lei dos cossenos, de acordo com a Figura 19, tem-se  $d^2 = D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta$ .

O movimento da densidade superficial de cargas na esfera gera uma corrente elétrica. Sendo assim, para uma corrente gerada por uma densidade de cargas em movimento tem-se  $\vec{J}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}$ , onde  $\vec{v}$  é a velocidade linear das cargas elétricas em movimento. Por outro lado, do movimento circunferencial, sabe-se que a relação entre  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{r}'$  é dada por  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Então a integral em (4.84) fica:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{\sqrt{D^2 + r'^2 - 2Dr' \cos \theta}} D^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \sigma D^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{\sqrt{D^2 + r'^2 - 2Dr' \cos \theta}} \sin \theta d\theta d\phi\end{aligned}\quad (4.85)$$

Note que, a integral de superfície fechada torna-se uma integral dupla em  $\theta$  e  $\phi$  e que, como deseja-se obter o potencial vetor e o campo magnético dentro e fora da esfera completa, então os limites de integração das coordenadas angulares são  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

No entanto, para resolver esta integral é necessário resolver o produto vetorial em seu integrando. Para isso, da Figura 19 é possível obter que:

$$\vec{\omega} = \omega \sin \psi \hat{\mathbf{i}} + \omega \cos \psi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.86)$$

$$\vec{r}' = D \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + D \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + D \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (4.87)$$

Para resolver esse produto vetorial utiliza-se o símbolo de Levi-Civita, então:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}')_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j r'_k$$

As componentes do produto vetorial ficam:

$$\begin{aligned}(\vec{\omega} \times \vec{r}')_1 &= \varepsilon_{123} \omega_2 r'_3 + \varepsilon_{132} \omega_3 r'_2 \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}')_2 &= \varepsilon_{213} \omega_1 r'_3 + \varepsilon_{231} \omega_3 r'_1 \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}')_3 &= \varepsilon_{312} \omega_1 r'_2 + \varepsilon_{321} \omega_2 r'_1\end{aligned}$$

Considerando a definição do símbolo Levi-Civita, tem-se  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$  e que  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$  e que o vetor  $\vec{\omega}$  não tem segunda componente, isto é, na direção  $\hat{\mathbf{j}}$ , então  $\omega_2 = 0$ . Desse modo, as componentes do produto vetorial ficam:

$$\begin{aligned}(\vec{\omega} \times \vec{r}')_1 &= -\omega_3 r'_2 \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}')_2 &= -\omega_1 r'_3 + \omega_3 r'_1 \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}')_3 &= \omega_1 r'_2\end{aligned}$$

Utilizando as equações (4.86) e (4.87) com os resultados das componentes do produto vetorial, tem-se:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}') = -D\omega \cos \psi \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + [-D\omega \sin \psi \cos \theta + D\omega \cos \psi \sin \theta \cos \phi] \hat{\mathbf{j}} + D\omega \sin \psi \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.88)$$

Ao substituir a equação acima em (4.85) haverá termos da forma:

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi \quad \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi \quad (4.89)$$

Essas integrais em (4.89) resultam em zero. Então sobrarão somente um termo da componente em  $\hat{\mathbf{j}}$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \sigma D^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{-D\omega \sin \psi \cos \theta \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta}} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^3 \sin \psi}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta}} d\theta \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^3 \sin \psi}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta}} d\theta \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^3 \sin \psi}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta}} d\theta \hat{\mathbf{j}} \quad (4.90) \end{aligned}$$

Para resolver a integral na equação (4.90), faz-se  $\alpha = D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta$ , então  $\frac{d\alpha}{2Dr} = \sin \theta \, d\theta$  e também  $\cos \theta = \frac{r^2 + D^2 - \alpha}{2Dr}$ . Adequando os intervalos à mudança de variável feita, faz-se: Quando  $\theta = 0 \rightarrow \alpha = D^2 + r^2 - 2Dr$  e  $\theta = \pi \rightarrow \alpha = D^2 + r^2 + 2Dr$ . Então:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^3 \sin \psi}{2} \int_{D^2+r^2-2Dr}^{D^2+r^2+2Dr} \frac{D^2 + r^2 - \alpha}{2Dr} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{d\alpha}{2Dr} \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^3 \sin \psi}{8D^2 r^2} \int_{D^2+r^2-2Dr}^{D^2+r^2+2Dr} \frac{(D^2 + r^2 - \alpha)}{\sqrt{\alpha}} d\alpha \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \int_{D^2+r^2-2Dr}^{D^2+r^2+2Dr} \left\{ \frac{(D^2 + r^2)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right\} d\alpha \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 2(D^2 + r^2) \left[ \alpha^{1/2} \Big|_{D^2+r^2-2Dr}^{D^2+r^2+2Dr} - \frac{2}{3} \left[ \alpha^{3/2} \Big|_{D^2+r^2-2Dr}^{D^2+r^2+2Dr} \right] \right\} \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Note que  $D^2 + r^2 + 2Dr = (D + r)^2$ , por outro lado,  $D^2 + r^2 - 2Dr = (D - r)^2$  ou  $D^2 + r^2 - 2Dr = (r - D)^2$ , então ao aplicar esse intervalo de integração nas antiderivadas  $\alpha^{1/2}$  e  $\alpha^{3/2}$  o resultado deve ser positivo, pois temos duas situações, para fora da esfera  $r > D$  e para dentro da esfera  $r < D$ . Para garantir essa exigência, é possível reescrever a integral da forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 2(D^2 + r^2) \left[ \sqrt{(D+r)^2} - \sqrt{|D-r|^2} \right] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$- \frac{\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ -\frac{2}{3} \left[ [(D+r)^2]^{3/2} - [|D-r|^2]^{3/2} \right] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 2(D^2 + r^2)[(D+r) - |D-r|] - \frac{2}{3} [(D+r)^3 - |D-r|^3] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

Para o caso do potencial vetor fora da esfera, tem-se  $r > D$ . Então  $\vec{A}(r > D)$  fica:

$$\vec{A}(r > D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 2(D^2 + r^2)[(D+r) - (r-D)] - \frac{2}{3} [(D+r)^3 - (r-D)^3] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r > D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 4D(D^2 + r^2) - \frac{2}{3} [2D^3 + 6r^2D] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r > D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left( \frac{12D^3 + 12Dr^2 - 4D^3 - 12Dr^2}{3} \right) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r > D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left( \frac{8D^3}{3} \right) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r > D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D^4 \sin \psi}{3r^2} \hat{\mathbf{j}}$$

De acordo com a Figura 19 nota-se que  $(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega r \sin \psi (-\hat{\mathbf{j}})$ , e este vetor está na direção  $-y$ , pois  $\omega$  está no plano  $XZ$ . Então:

$$\vec{A}(r > D) = \frac{\mu_0 \sigma D^4 \omega r \sin \psi}{3r^3} (-\hat{\mathbf{j}})$$

$$\vec{A}(r > D) = \frac{\mu_0 \sigma D^4}{3r^3} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.91)$$

Para o caso do potencial vetor dentro da esfera, tem-se  $D > r$ . Então  $\vec{A}(D > r)$  fica:

$$\vec{A}(r < D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 2(D^2 + r^2)[(D+r) - (D-r)] - \frac{2}{3} [(D+r)^3 - (D-r)^3] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r < D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left\{ 4r(D^2 + r^2) - \frac{2}{3} [2r^3 + 6D^2r] \right\} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r < D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{8r^2} \left( \frac{8r^3}{3} \right) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A}(r < D) = \frac{-\mu_0 \omega \sigma D \sin \psi}{3} \hat{\mathbf{j}}$$

Análogo ao caso anterior:

$$\begin{aligned}\vec{A}(r < D) &= \frac{\mu_0 \sigma D \omega r \sin \psi}{3} (-\hat{\mathbf{j}}) \\ \vec{A}(r < D) &= \frac{\mu_0 \sigma D}{3} (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (4.92)$$

Após o cálculo da integral, deve-se retornar a configuração inicial do problema, isto é, aquela apresentada na Figura 18. Sendo assim, é necessário expressar os resultados (4.91) e (4.92) de maneira adequada. Então, tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{A}(r < D) &= \frac{\mu_0 \sigma D}{3} (\omega \hat{\mathbf{k}} \times r \hat{\mathbf{r}}) \sin \theta \\ \vec{A}(r < D) &= \frac{1}{3} \mu_0 \sigma D \omega r \sin \theta (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}})\end{aligned}$$

Note que  $(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}})$  deve resultar em um vetor perpendicular simultaneamente a  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$ , então  $(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}) = \hat{\phi}$ , pois o vetor unitário orientado ao longo da direção azimutal da esfera atende ao critério exigido. Então:

$$\vec{A}(r < D) = \frac{1}{3} \mu_0 \sigma D \omega r \sin \theta \hat{\phi} \quad (4.93)$$

Fazendo o mesmo procedimento para  $\vec{A}(r > D) = \frac{\mu_0 \sigma D^4}{3r^3} (\vec{\omega} \times \vec{r})$ , tem-se:

$$\vec{A}(r > D) = \frac{1}{3r^2} \mu_0 \sigma D^4 \omega \sin \theta \hat{\phi} \quad (4.94)$$

Para encontrar o campo magnético nas regiões dentro e fora da esfera utiliza-se a relação  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Devido a geometria do problema, é conveniente utilizar o operador rotacional em coordenadas esféricas.

O rotacional de um campo  $\vec{f}$  com componentes  $f_r$ ,  $f_\theta$  e  $f_\phi$  é dado por:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{f} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [f_\phi \sin \theta] - \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \right\} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial f_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} [r f_\phi] \right\} \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r f_\theta] - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi}\end{aligned}\quad (4.95)$$

No entanto, os resultados que obtivemos para o potencial vetor magnético, tanto para fora quanto para dentro da esfera, indicam que  $\vec{A}$  só possui componente na direção  $\phi$ , então, nesse caso,  $A_r = A_\theta = 0$ . Dessa forma, o rotacional fica:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} \quad (4.96)$$

Com o resultado da equação (4.96) podemos encontrar o campo magnético dentro e fora da esfera. Combinando a equação (4.93) com (4.96), tem-se o campo magnético interno  $\vec{B}_i$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{3} \mu_0 \sigma D \omega r (\sin \theta)^2 \right] \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{3} \mu_0 \sigma D \omega r^2 \sin \theta \right] \hat{\theta} \\ \vec{B}_i &= \frac{\mu_0 \sigma D \omega}{3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta]^2 \hat{r} - \frac{\mu_0 \sigma D \omega \sin \theta}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^2] \hat{\theta} \\ \vec{B}_i &= \frac{2\mu_0 \sigma D \omega}{3} \cos \theta \hat{r} - \frac{2\mu_0 \sigma D \omega}{3} \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Para o obtermos o campo magnético externo a esfera  $\vec{B}_e$ , substitui-se (4.94) em (4.96).

$$\begin{aligned} \vec{B}_e &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{3r^2} \mu_0 \sigma D^4 \omega (\sin \theta)^2 \right] \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{3r} \mu_0 \sigma D^4 \omega \sin \theta \right] \hat{\theta} \\ \vec{B}_e &= \frac{\mu_0 \sigma D^4 \omega}{3r^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\sin \theta)^2] \hat{r} - \frac{\mu_0 \sigma D^4 \omega \sin \theta}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \right] \hat{\theta} \\ \vec{B}_e &= \frac{2\mu_0 \sigma D^4 \omega}{3r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{\mu_0 \sigma D^4 \omega}{3r^3} \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned} \quad (4.98)$$

Para auxiliar na discussão física do campo interno à esfera nesse caso, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 20. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.97).

Observa-se na Figura 20 que o comportamento do campo interno neste problema se assemelha muito ao da esfera submersa no campo magnético uniforme. Essa relação é devida à circulação das cargas superficiais da esfera, que devido à velocidade angular constante simula laços de corrente estacionária. O comportamento do campo magnético obtido à partir do potencial vetor magnético é uma manifestação desse movimento circular. Vale a pena comentar novamente que o campo aqui obtido não é um campo eletrodinâmico, devido à ausência de dependência temporal. Ele também é um campo de módulo constante, nas mesmas direções  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  que o campo do problema 4.4. Uma pergunta que pode ser feita aqui é: sob quais circunstâncias esses campos dos problemas 4.4 e 4.5 são iguais? Esta pergunta poderá ser respondida de maneira adequada em um estudo posterior.

Por outro lado, para auxiliar na discussão física do campo externo para esse caso, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 21. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.98).

O campo externo, por sua vez, é diferente do campo magnético externo do problema 4.4. Aqui, este campo não atinge um valor terminal constante para grandes distâncias, desaparecendo

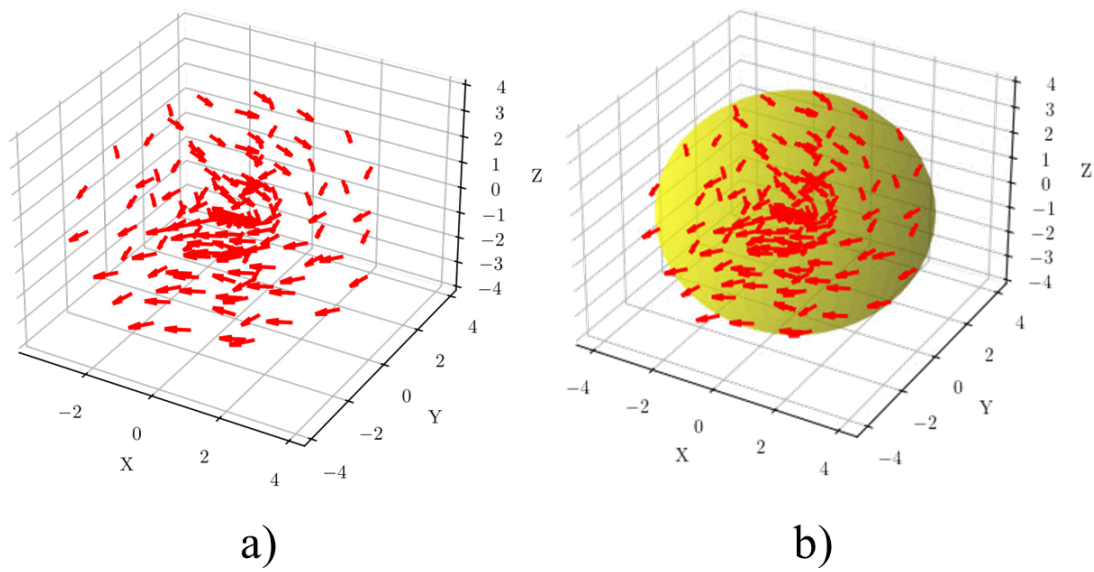


Figura 20 – Gráfico do campo vetorial na região interna a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica.

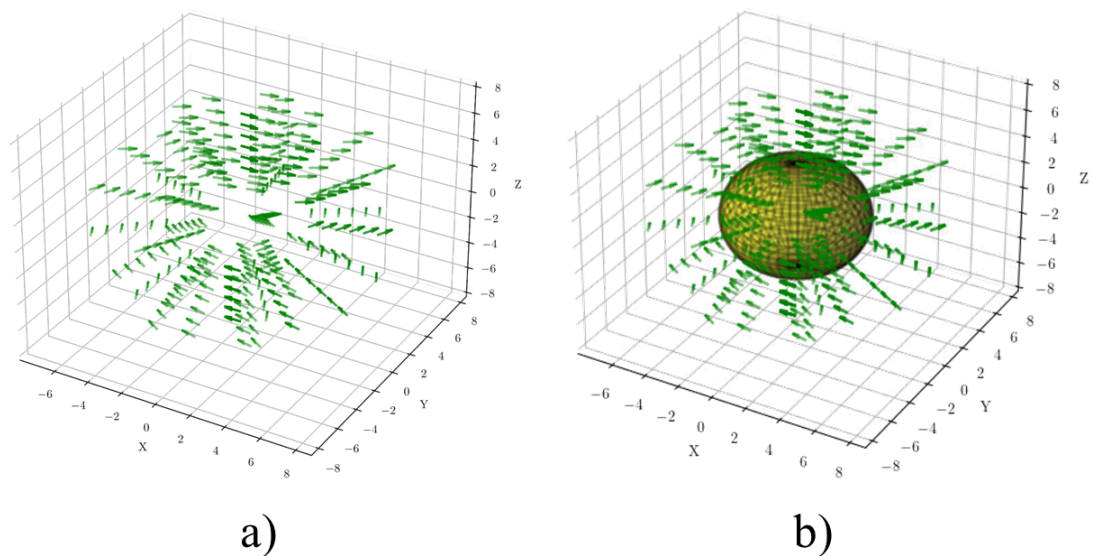


Figura 21 – Gráfico do campo vetorial na região externa a esfera. a) Campo magnético sem a simulação da superfície esférica. b) Campo magnético com a simulação da superfície esférica.

nesse caso. Como pode ser visto na equação (4.98), este campo decai com o cubo da distância e a componente circulatória na direção  $\hat{\theta}$  tem o sinal positivo. Observe que o campo diverge e rotaciona, porém é estático. A visualização e comparação destes campos é muito importante para estudos futuros de propriedades magnéticas de materiais.

## 4.6 Problema 6: Capacitor de placas paralelas

O problema que resolveremos a seguir é uma questão da parte de eletromagnetismo da prova do EUF aplicada no primeiro semestre do ano de 2022. O comando da questão, exatamente como está na prova, é:

(EUF - 2022-1) Um capacitor de placas paralelas é preenchido por um dielétrico com permissividade elétrica  $\epsilon$ . A distribuição de carga elétrica no espaço entre as placas é dada por  $\rho(z) = \rho_0 e^{-2\alpha z}$ , onde  $z$  é a direção perpendicular às placas e  $\rho_0$  e  $\alpha$  são constantes. A placa localizada em  $z = 0$  possui um potencial  $V = V_0$ , enquanto a placa localizada em  $z = d$  possui um potencial  $V = 2V_0$ , onde  $V_0$  é constante. Considerando os efeitos de borda desprezíveis, qual o potencial elétrico  $V(z)$  no interior do capacitor?

- a)  $V(z) = V_0(1 + z/d) + \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha z}) - \frac{z}{d} \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha d})$
- b)  $V(z) = V_0 + V_0 \frac{\ln(1+z/d)}{\ln 2} + \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha z}) - \frac{z}{d} \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha d})$
- c)  $V(z) = V_0(1 + z/d) + \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha z})$
- d)  $V(z) = V_0 + V_0 \frac{\ln(1+z/d)}{\ln 2} + \frac{\rho_0}{4\epsilon\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha z})$
- e)  $V(z) = V_0(1 + z/d)$

Para ilustrar e facilitar a compreensão da situação descrita acima, tem-se a Figura 22.

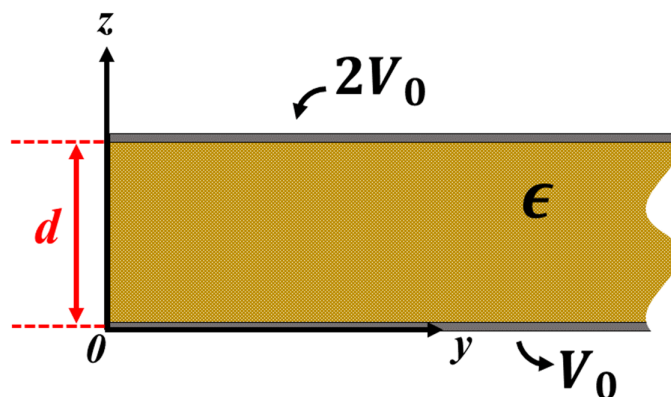


Figura 22 – Placas paralelas com um dielétrico preenchendo o espaço entre elas. A direção positiva da coordenada  $x$  está apontando para fora da página.

Para iniciar a resolução deste problema, de acordo com o comando da questão, sabe-se que na região onde pretende-se calcular o potencial existe uma distribuição de cargas dada por

$\rho(z) = \rho_0 e^{-2\alpha z}$ , então utiliza-se a equação de Poisson para um meio com permissividade elétrica  $\epsilon$ , que nesse caso é o dielétrico<sup>2</sup>.

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} \rho$$

Devido a geometria do problema, convém utilizar coordenadas cartesianas, então:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho_0 e^{-2\alpha z} \quad (4.99)$$

Pelo enunciado da questão, nota-se que o potencial depende somente da coordenada  $z$ , isso porque as placas paralelas são semi-infinitas, suas dimensões em  $x$  e  $y$  são consideradas muito grandes, praticamente infinitas, enquanto que sua dimensão em  $z$  é finita.

Devido a característica citada acima em relação às coordenadas  $x$  e  $y$  das placas, conclui-se que o potencial elétrico não deve depender destas variáveis. Dessa forma, a equação (4.99) reduz-se à:

$$\frac{d^2}{dz^2} V(z) = -\frac{1}{\epsilon} \rho_0 e^{-2\alpha z} \quad (4.100)$$

A equação diferencial (4.100) é de simples resolução, basta integrar duas vezes em relação a variável  $z$ . Desse modo, observa-se que:

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \int e^{-2\alpha z} dz = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha z} + C_1 \right] \quad (4.101)$$

Integrando a equação (4.101), tem-se:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} \int e^{-2\alpha z} dz + \frac{\rho_0 C_1}{2\alpha\epsilon} \int dz \\ V(z) &= \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} \left( -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha z} + C_2 \right) + \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} C_1 z \\ V(z) &= -\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon} e^{-2\alpha z} + \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} C_1 z + \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} C_2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Note, na equação (4.102), que os produtos de  $\frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon}$  com as constantes  $C_1$  e  $C_2$  continuam resultando em outras constantes arbitrárias. Além disso, ao realizar a propriedade distributiva da multiplicação, os sinais negativos são englobados pelas constantes  $C_1$  e  $C_2$ . Então, podemos reescrever cada um destes produtos como uma única constante.

$$V(z) = -\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon} e^{-2\alpha z} + K_1 z + K_2 \quad (4.103)$$

<sup>2</sup> Caso o meio em que pretendêssemos calcular o potencial elétrico fosse o vácuo, então a equação de Poisson seria  $\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ , onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo.

A equação (4.103) é uma solução geral para este problema. Note que aparecem agora duas constantes de integração  $K_1$  e  $K_2$ , as quais determinaremos através das condições de contorno fornecidas pelo problema, as quais são:

- A placa localizada em  $z = 0$  possui um potencial elétrico  $V = V_0$ . Matematicamente:  
 $V(0) = V_0$
- A placa localizada em  $z = d$  possui um potencial elétrico  $V = 2V_0$ . Matematicamente:  
 $V(d) = 2V_0$

Aplicando a primeira condição de contorno na solução geral, observa-se que:

$$\begin{aligned} V(0) &= V_0 = -\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon} + K_2 \\ K_2 &= V_0 + \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado (4.104) em (4.103), tem-se:

$$\begin{aligned} V(z) &= -\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}e^{-2\alpha z} + K_1z + V_0 + \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon} \\ V(z) &= \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}(1 - e^{-2\alpha z}) + K_1z + V_0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

Aplicando a segunda condição de contorno na equação (4.104), tem-se:

$$\begin{aligned} V(d) &= 2V_0 = \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}(1 - e^{-2\alpha d}) + K_1d + V_0 \\ K_1 &= -\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon d}(1 - e^{-2\alpha d}) + \frac{V_0}{d} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Substituindo o resultado apresentado na equação (4.105) em (4.104), tem-se:

$$V(z) = \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}(1 - e^{-2\alpha z}) - \frac{\rho_0 z}{4\alpha^2\epsilon d}(1 - e^{-2\alpha d}) + \frac{z}{d}V_0 + V_0$$

Por fim, a solução específica deste problema é dada por:

$$V(z) = V_0\left(1 + \frac{z}{d}\right) + \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}(1 - e^{-2\alpha z}) - \frac{z}{d}\frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon}(1 - e^{-2\alpha d}) \quad (4.106)$$

Utilizando a relação (2.3), e sabendo a forma do operador gradiente em coordenadas cartesianas tem-se:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.107)$$

Combinado a equação (4.107) com (4.106), o campo elétrico para este problema é:

$$\vec{E}(z) = \left[ -\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{2\alpha\epsilon} e^{-2\alpha z} + \frac{\rho_0}{4\alpha^2\epsilon d} (1 - e^{-2\alpha d}) \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (4.108)$$

Para auxiliar na discussão física dos resultados deste problema, foram plotados em Python os gráficos presentes na Figura 23. O campo vetorial presente nesta Figura é referente à equação (4.108).

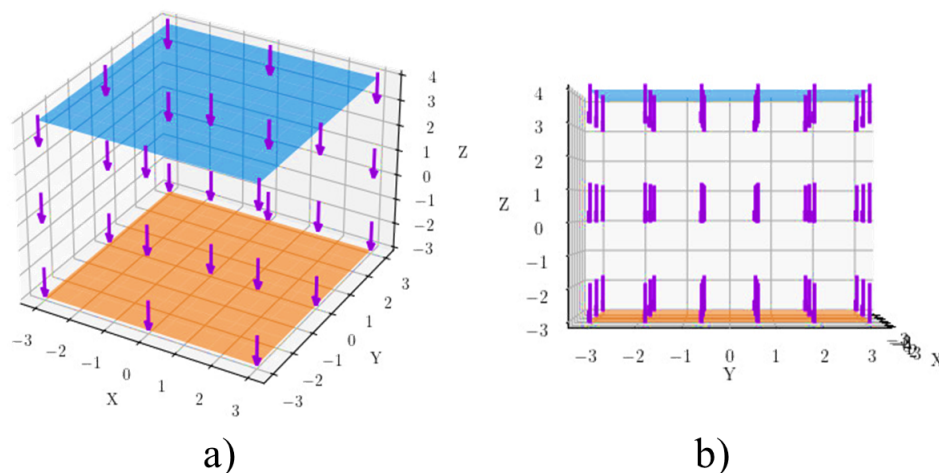


Figura 23 – Gráficos do campo vetorial do problema 6. a) Visão padrão na direção da diagonal principal da grade espacial. b) Visão frontal do campo elétrico

Observando a Figura 21-b), nota-se que a direção do campo aponta para a placa de baixo, isso indica que o campo está direcionado da placa de maior potencial (de cor azul com potencial  $2V_0$ ) para a de menor potencial (de cor laranja com menor potencial  $V_0$ ). Esse resultado é fisicamente coerente, o campo elétrico aponta de uma região de maior potencial para uma região com menor potencial.

Por outro lado, o campo na região entre placas não é uniforme, pois a densidade de cargas nessa região não é homogênea, ela varia de acordo com  $z$ . Além disso, ao plotar o gráfico no Python, o campo vetorial foi normalizado, isto é, as flechas do campo elétrico foram forçadas a assumir o mesmo comprimento e visualmente o campo elétrico aparenta ser uniforme. No entanto, essa normalização não altera o comportamento do campo.

## 4.7 Problema 7: Polarizabilidade do átomo de hidrogênio simplificado

Este problema encontra-se na referência [11]. O comando da questão, exatamente como está no livro, é o seguinte: Segundo a mecânica quântica, a nuvem de um átomo de hidrogênio em estado fundamental tem uma densidade de carga

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$

onde  $q$  é a carga do elétron e  $a$  é o raio de Bohr. Encontre a polarizabilidade desse átomo. [Dica: primeiro calcule o campo elétrico da nuvem de elétrons,  $E_r(r)$ ; Depois expanda o potencial assumindo que  $r \ll a$ ]

Para ilustrar o átomo de hidrogênio em seu estado fundamental, tem-se a Figura 24.

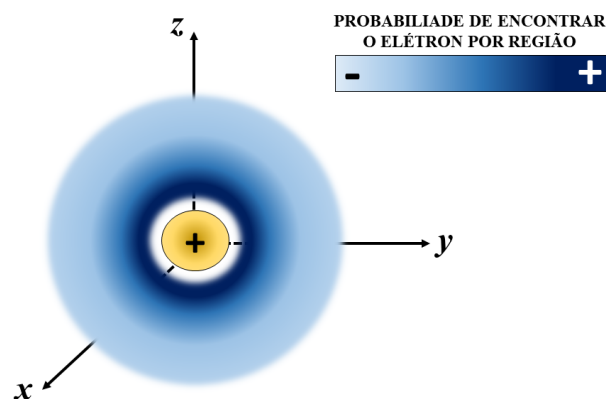


Figura 24 – Átomo de hidrogênio com seu centro geométrico coincidindo com a origem de um referencial tridimensional.

Em seguida, supõe-se que um campo elétrico externo atua na região onde o átomo está presente, polarizando o mesmo, como mostra a Figura 25:

Para encontrar o campo elétrico  $\vec{E}$  gerado pelo átomo polarizado, considerando simetria radial, utiliza-se a lei de Gauss em sua forma integral:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Onde  $Q$  é a carga englobada pela superfície gaussiana. Neste caso, a superfície gaussiana será uma esfera de raio  $d$ , a qual engloba a densidade de cargas da nuvem eletrônica do átomo. Por outro lado, não conhecemos diretamente a carga  $Q$  envolta pela superfície gaussiana, mas conhecemos a densidade  $\rho$ , dada no comando do problema. Sendo assim, recorreremos à relação:

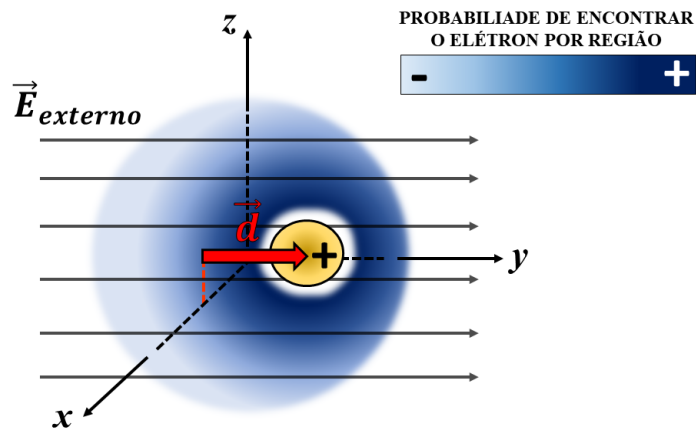


Figura 25 – Átomo de hidrogênio polarizado devido a presença de um campo elétrico uniforme.

$$Q = \int_V \rho \, dv \quad (4.109)$$

Com a relação (4.109), é possível encontrar a carga encerrada pela superfície de Gauss integrando a densidade de cargas englobada pelo volume  $V$  da superfície gaussiana.

É relevante ressaltar que, devido considerarmos simetria para esse caso, os resultados encontrados aqui serão aproximações. Considerando a geometria esférica do átomo de hidrogênio em seu estado fundamental, o diferencial de volume na integral da carga deve ser apresentado em coordenadas esféricas. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^d \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \, dr \\ &= \frac{q}{\pi a^3} 2\pi \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \, dr \\ &= \frac{2q}{a^3} (-\cos \pi + \cos 0) \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \, dr \\ &= \frac{2q}{a^3} [ -(-1) + 1 ] \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \, dr \\ Q &= \frac{4q}{a^3} \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \, dr \quad (4.110) \end{aligned}$$

A integral em  $r$  na equação (4.110) chamaremos de  $I_1$  e resolveremos por integração por partes. Fazendo:

$$u = r^2 \rightarrow du = 2rdr$$

$$dv = e^{-\frac{2r}{a}} dr \rightarrow v = -\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}}$$

Então, tem-se:

$$I_1 = \left[ -\frac{ar^2}{2} e^{-\frac{2r}{a}} \right]_0^d + a \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r dr$$

$$I_1 = -\frac{ad^2}{2} e^{-\frac{2d}{a}} + a \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} r dr$$

$$I_1 = -\frac{ad^2}{2} e^{-\frac{2d}{a}} + aI_2 \quad (4.111)$$

Na equação (4.111), a integral em  $r$  chamaremos de  $I_2$  e resolveremos novamente por integração por partes, então:

$$t = r \rightarrow dt = dr$$

$$ds = e^{-\frac{2r}{a}} dr \rightarrow s = -\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}}$$

$$I_2 = \left[ -\frac{ar}{2} e^{-\frac{2r}{a}} \right]_0^d + \frac{a}{2} \int_0^d e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

$$I_2 = -\frac{ad}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^2}{4} (e^{-\frac{2d}{a}} - 1)$$

Substituindo  $I_2$  em  $I_1$ , tem-se:

$$I_1 = -\frac{ad^2}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^2 d}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^3}{4} (e^{-\frac{2d}{a}} - 1)$$

Substituindo  $I_1$  na expressão para a carga  $Q$ , tem-se:

$$Q = \frac{4q}{a^3} \left[ -\frac{ad^2}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^2 d}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^3}{4} (e^{-\frac{2d}{a}} - 1) \right]$$

$$Q = \frac{4q}{a^3} \left[ -\frac{ad^2}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^2 d}{2} e^{-\frac{2d}{a}} - \frac{a^3}{4} e^{-\frac{2d}{a}} + \frac{a^3}{4} \right]$$

$$Q = q \left[ 1 - e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d^2}{a^2} + 2\frac{d}{a} \right) \right] \quad (4.112)$$

Substituindo o resultado encontrado (4.112) na Lei de Gauss da eletrostática na forma integral, observa-se que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ 1 - e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d^2}{a^2} + 2\frac{d}{a} \right) \right]$$

Onde  $\hat{n}$  é o vetor normal a superfície gaussiana.

$$E \oint_S da = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ 1 - e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d^2}{a^2} + 2\frac{d}{a} \right) \right] \quad (4.113)$$

A integral na equação (4.113) refere-se a toda a superfície gaussiana, então a integral de superfície fica  $\oint_S da = 4\pi d^2$ :

$$E4\pi d^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ 1 - e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d^2}{a^2} + 2\frac{d}{a} \right) \right]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \left[ 1 - e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) \right] \quad (4.114)$$

Lembrando que a representação em série de potência da função exponencial é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Então, nesse caso, tem-se:

$$e^{-\frac{2d}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-2d}{a} \right)^n = \frac{1}{0!} \left( \frac{-2d}{a} \right)^0 + \frac{1}{1!} \left( \frac{-2d}{a} \right)^1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{-2d}{a} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{-2d}{a} \right)^3 + \dots$$

$$e^{-\frac{2d}{a}} = 1 - 2\left(\frac{d}{a}\right) + 2\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3 + \dots \quad (4.115)$$

Multiplicando a expressão (4.115) pelo fator  $\left(1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2}\right)$ , tem-se:

$$e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) = \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) \left[ 1 - 2\left(\frac{d}{a}\right) + 2\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3 + \dots \right] \quad (4.116)$$

Ao realizarmos a multiplicação à direita da igualdade na equação (4.116), tem-se:

$$e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) = 1 - 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} + \frac{4d^3}{3a^3} + 2\frac{d}{a} - 4\frac{d^2}{a^2} + 4\frac{d^3}{a^3} +$$

$$+ 2\frac{d^2}{a^2} - 4\frac{d^3}{a^3} + 4\frac{d^4}{a^4} - \frac{8d^3}{3a^3} + \dots \quad (4.117)$$

$$e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) = 1 - \frac{4d^3}{3a^3} + \dots$$

Note que os termos após  $\frac{4d^3}{3a^3}$  são de ordem superior, isto é, possuem expoentes maiores que 3. Para o caso onde  $d \ll a$ , esses termos de ordem superior podem ser desprezados e tem-se a seguinte aproximação:

$$e^{-\frac{2d}{a}} \left( 1 + 2\frac{d}{a} + 2\frac{d^2}{a^2} \right) \approx 1 - \frac{4d^3}{3a^3} \quad (4.118)$$

Substituindo o resultado apresentado na equação (4.118) em (4.114), tem-se:

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \frac{4d^3}{3a^3}$$

$$E \approx \frac{1}{3a^3\pi\epsilon_0} qd$$

Sabendo que o momento dipolar elétrico é dado por  $\vec{P} = q\vec{d}$ , onde  $d$  é a distância, nesse caso, entre o núcleo de carga positiva e a nuvem eletrônica de carga negativa. Então, podemos escrever:

$$\vec{E} = \frac{1}{3a^3\pi\epsilon_0} \vec{P} \quad (4.119)$$

Sendo o momento dipolar elétrico diretamente proporcional ao campo elétrico gerado pelo dipolo, então temos:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \rightarrow \vec{P} \frac{1}{\alpha} = \vec{E} \quad (4.120)$$

Onde  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade, que é definida como a polarizabilidade. Comparando a expressão (4.120) com o resultado encontrado, verifica-se que:

$$\alpha = 3\pi\epsilon_0 a^3$$

Para auxiliar a explicação do problema, tem-se a Figura 26. Para plotar o campo elétrico do dipolo e as curvas de potenciais utilizou-se um script presente na referência [2].

O que ocorre aqui é que o campo externo polariza o átomo de hidrogênio, o qual sabemos que somente possui um elétron em torno do núcleo, pois a presença desse campo desloca os centros de cargas e assim tem-se duas cargas de sinais opostos separadas por uma distância  $d$ , essa estrutura é basicamente um dipolo elétrico. Uma das cargas é a do elétron e a outra é a carga positiva do núcleo do átomo, visualmente esse deslocamento está representado na Figura 25.

A relação entre a Figura 26 e o problema está na equação (4.119), a qual deixa explícito que o campo elétrico em um átomo de hidrogênio polarizado é expresso em termos do momento dipolar elétrico.

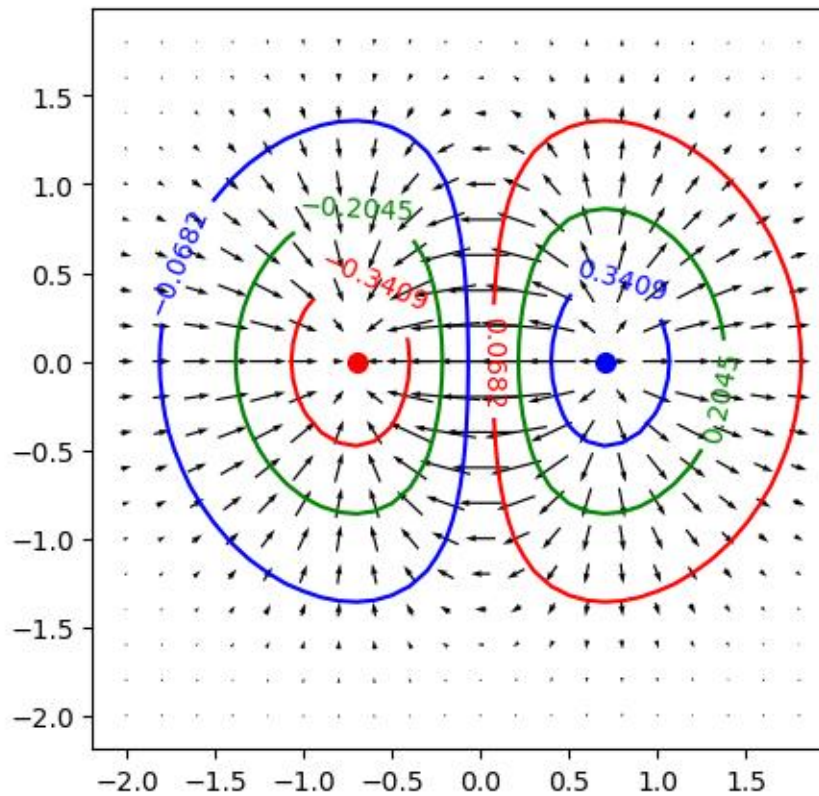


Figura 26 – Plot do gráfico do campo e potencial elétrico para um dipólo elétrico

## 4.8 Problema 8: Potencial elétrico para pontos distantes de uma esfera

Este problema encontra-se na referência [11]. De acordo com o livro, o comando do problema é: Uma esfera de raio  $R$ , centrada na origem, tem densidade de carga

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta$$

Onde  $k$  é uma constante e  $r, \theta$  são as coordenadas esféricas usuais. Encontre o potencial aproximado para pontos do eixo  $z$  distantes da esfera.

Para resolver este problema, em princípio, poderíamos integrar a densidade de cargas no volume da esfera para obter a carga total da mesma e em seguida utilizar a Lei de Gauss, procedendo desta forma, faz-se:

$$Q = \int_V \rho dV$$

Visto que a geometria do problema é esférica, então convém utilizar o diferencial de volume em coordenadas esféricas  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q &= Rk \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (R-2r) \sin \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
&= Rk \int_0^R (R-2r) dr \int_0^\pi (\sin \theta)^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= Rk \int_0^R (R-2r) dr \frac{\pi}{2} 2\pi \\
&= Rk\pi^2 \int_0^R (R-2r) dr \\
&= Rk\pi^2 \left[ Rr - r^2 \right]_0^R \\
Q &= Rk\pi^2 (R^2 - R^2 - 0 - 0) = 0
\end{aligned} \tag{4.121}$$

O resultado presente na equação (4.121) indica que não existe contribuição do monopolo elétrico para o campo elétrico gerado pela esfera. Dessa forma, não é relevante utilizar a Lei de Gauss para esse caso. Para contornar este problema, utiliza-se a equação (2.29) para expansão multipolar. Expandindo os três primeiros termos do somatório dado da equação citada, tem-se:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int (r') \rho(\vec{r}') \cos \theta' dV' + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \rho(\vec{r}') dV' + \dots
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Em seguida resolveremos as integrais presentes nos três primeiros termos da expansão em (4.122). Note que, o primeiro termo da expansão é a contribuição do monopolo elétrico para o potencial elétrico, o segundo termo é a contribuição do dipolo elétrico e o terceiro termo é a contribuição do quadrupolo e assim sucessivamente.

Para facilitar a manipulação matemática na resolução dos problemas façamos o seguinte:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} I_1 + \frac{1}{r^2} I_2 + \frac{1}{r^3} I_3 + \dots \right) \tag{4.123}$$

Onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são as integrais na respectiva ordem da expansão. Note que a integral  $I_1$  já foi resolvida em (4.121), a qual resulta nula, então  $I_1 = 0$ . Resolvendo  $I_2$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
I_2 &= Rk \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \cos \theta) \frac{1}{r^2} (R - 2r) \sin \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
&= Rk \int_0^R (Rr - 2r^2) dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi Rk \int_0^R (Rr - 2r^2) dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\
&= 2\pi Rk \int_0^R (Rr - 2r^2) dr \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right] \\
&= 2\pi Rk \int_0^R (Rr - 2r^2) dr \left( \frac{\sin^3 \pi}{3} - \frac{\sin^3 0}{3} \right) \\
I_2 &= 2\pi Rk \int_0^R (Rr - 2r^2) dr \times 0 = 0
\end{aligned} \tag{4.124}$$

Resolvendo  $I_3$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
I_3 &= Rk \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r^2} (R - 2r) \sin \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
&= Rk \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) (Rr^2 - 2r^3) \sin^2 \theta dr d\theta d\phi \\
&= 2\pi Rk \int_0^R (Rr^2 - 2r^3) dr \int_0^\pi \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \sin^2 \theta d\theta \\
&= 2\pi Rk \int_0^R (Rr^2 - 2r^3) dr \int_0^\pi \left[ \frac{3}{2} (1 - \sin^2 \theta) - \frac{1}{2} \right] \sin^2 \theta d\theta \\
&= \pi Rk \int_0^R (Rr^2 - 2r^3) dr \int_0^\pi [3(1 - \sin^2 \theta) - 1] \sin^2 \theta d\theta \\
&= \pi Rk \int_0^R (Rr^2 - 2r^3) dr \int_0^\pi (2 \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta) d\theta \\
&= \pi Rk \left[ R \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{2} \Big|_0^R \right] \left[ 2 \frac{\pi}{2} - 3 \frac{3\pi}{8} \right] \\
&= \pi Rk \left( -\frac{R^4}{6} \right) \left( -\frac{\pi}{8} \right) \\
I_3 &= \frac{kR^5 \pi^2}{48}
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Substituindo os resultados encontrados para  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ <sup>3</sup> em (4.123), tem-se:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{kR^5 \pi^2}{48} + \dots$$

Para o pontos da direção z, basta considerar o vetor posição radial  $\vec{r}$  na direção z. Além disso, visto que utilizamos a expansão multipolar, estamos tratando de grandes distâncias e, da

<sup>3</sup> Para resolver a parte angular na integral  $I_3$ , utilizou-se a identidade trigonométrica  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

teoria eletromagnética, sabe-se que a contribuição dos demais polos elétricos de ordem maior decaem mais rapidamente com a distância. Sendo assim, os demais termos da expansão podem ser desprezados, então tem-se:

$$V(z) \approx \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{kR^5\pi}{48z^3} \quad (4.126)$$

Utilizando a relação (2.3) e admitindo o gradiente em coordenadas cartesianas, pois estamos considerando o campo na direção  $z$  muito longe da esfera.

$$\vec{E}(z) = \frac{kR^5\pi}{64\epsilon_0} \frac{1}{z^4} \hat{\mathbf{k}} \quad (4.127)$$

Para auxiliar na explicação física tem-se o gráfico presente na Figura 27. Este gráfico é referente a equação (4.127).

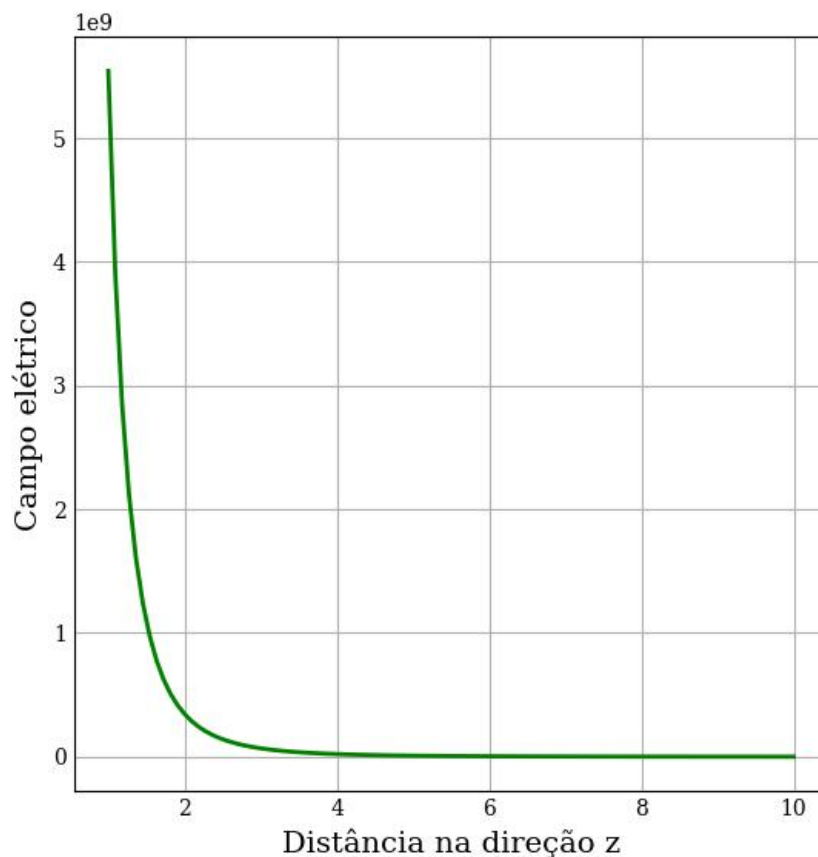


Figura 27 – Gráfico do campo elétrico em função da distância na direção  $z$

De acordo com o gráfico da Figura 27, é possível notar que o campo elétrico decai rapidamente com o inverso da quarta potência de  $z$  ( $1/z^4$ ). Esse efeito é fisicamente consistente, pois para o cálculo deste problema foi utilizada a expansão multipolar e notou-se que as contribuições de monopolo e dipólo para o campo elétrico eram nulas. Por outro lado, o primeiro termo da

expansão que contribuiu para o campo elétrico gerado foi o termo referente ao quadrupolo elétrico, por esse motivo o campo decai inversamente proporcional a potência quarta da distância entre a densidade de cargas e o ponto analisado.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as discussões físicas completamente baseadas na teoria eletromagnética clássica, o desenvolvimento matemático detalhado na resolução de cada problema e a ênfase desta monografia em tratar da visualização gráfica apresentada para cada situação física, conclui-se que foi cumprido o principal objetivo deste trabalho, o qual é produzir e fornecer um material didático, detalhado e acessível para aqueles que desejarem ter informações sobre problemas de condições de contorno no eletromagnetismo clássico.

Além disso, ao decorrer da apresentação dos resultados torna-se evidente a importância e benefício da visualização dos fenômenos físicos atrelados aos resultados matemáticos. Essa informação visual dos resultados de um problema físico é, muitas vezes, ignorada ou considerada irrelevante pelos estudantes em geral. Por outro lado, a implementação gráfica, lúdica e visual de fenômenos físicos é de extrema importância, pois auxilia os alunos a extraírem informações físicas das soluções matemáticas dos problemas.

Essa implementação visual, assim como almejado nos objetivos desta monografia, pode ser realizada utilizando recursos tecnológicos, por exemplo, linguagens e softwares de programação. Um estudante pode chegar em um resultado matemático que acredite ser duvidoso e com a ajuda da linguagem de programação Python ele pode visualizar seu resultado através da plotagem de gráficos, campos vetoriais ou superfícies. Dessa forma, baseado nessa informação visual auxiliada pela tecnologia, o acadêmico pode aprender com mais facilidade. No entanto, vale ressaltar que os gráficos apresentados neste trabalho tem suas limitações. Eles não representam uma situação física do mundo real, pois a maioria dos problemas envolve simetria ou cálculos aproximados. A ideia principal é que os gráficos ajudem na caracterização e verificação do comportamento dos campos e potenciais elétricos e magnéticos.

Além disso, aprofundar os conhecimentos na área do eletromagnetismo clássico e suas ferramentas matemáticas foi um enorme ganho pessoal, tanto em experiência e preparação para a carreira acadêmica quanto em informação.

## REFERÊNCIAS

- [1] AHARONOV, Y.; BOHM, D., *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Physical Review, 1959. Citado na página 18.
- [2] AVILA, S. L., *Cálculo numérico aplicado a engenharia elétrica*, Publicação do IFSC, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 124.
- [3] BASSALO, J. M. F., *Eletrodinâmica clássica*, Livraria da Física, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- [4] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D., *Elementos de física matemática: equações diferenciais ordinárias, transformadas e funções especiais*, Livraria da Física, Vol. 1, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 86, 90, 91, 92, 93 e 97.
- [5] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D., *Elementos de física matemática: equações diferenciais parciais e cálculo das variações*, Livraria da Física, Vol. 2, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 36, 45, 52, 98, 100 e 103.
- [6] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B., *Elementary differential equations and boundary value problems.*, 2001. Citado na página 20.
- [7] CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T., *Heritage and early history of the boundary element method. Engineering analysis with boundary elements*, 2005. Citado na página 21.
- [8] DA SILVA, O. H. M.; GARCIA, N. M. D., *Aspectos físico e matemático no ensino do conceito de campo elétrico*, 2009. Citado na página 14.
- [9] EDMINISTER, J. A.; NAHVI, M. *Eletromagnetismo*, trad. Rafael Silva Alípio, 3. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2013. Citado na página 18.
- [10] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R.; SANDS, M., *Lições de física de Feynman*, vol.2, Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.
- [11] GRIFFITHS, D. J., *Eletrodinâmica*, 3. ed. Pearson Education, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 17, 18, 22, 25, 27, 61, 73 e 78.
- [12] GURU, B. S.; HIZIROGLU, H. R., *Electromagnetic field theory fundamentals*, Cambridge university press, 2009. Citado na página 21.
- [13] JACKSON, J. D., *Classical Eletrodynamics*, 2. ed. Guanabara Dois, 1999 Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18 e 29.
- [14] MENEZES, N. N. C., *Introdução a programação com Python*, São Paulo: Novatec, 2010 Citado na página 13.

- 
- [15] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica: Eletromagnetismo*, vol.3, Blucher, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 19.
- [16] PERGUNTAS FREQUENTES/ SOBRE PYTHON. Python. 19. out. de 2017, Disponível em: [https://wiki.python.org.br/PerguntasFrequentes/SobrePython#Que\\_escolas.2Faculdades.2Funiversidades\\_usam\\_Python.3F](https://wiki.python.org.br/PerguntasFrequentes/SobrePython#Que_escolas.2Faculdades.2Funiversidades_usam_Python.3F). Acesso em: 07, out. de 2022 Citado na página 13.
- [17] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W., *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- [18] SAVELYEV, I. V. *Physics. A General Course. Electricity and Magnetism. Waves. Optics*, vol.2, Moscow, 1989 Citado na página 16.

## APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTOS DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

### A.0.1 Solução de equações diferenciais pelo método de Frobenius

Dada uma equação diferencial ordinária de segunda ordem na forma:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Sendo  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  polinômios, então:

- Se existe um ponto  $x_0$  tal que  $P(x_0) \neq 0$ , então  $x_0$  é chamado **ponto ordinário** [4] e existe, na vizinhança deste ponto, uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (\text{A.1})$$

- Se existe um ponto  $x_0$  tal que  $P(x_0) = 0$ , então  $x_0$  é chamado **ponto singular** [4]. No entanto, deve-se verificar se este ponto singular é regular ou irregular. O critério para esta verificação é o seguinte: Tomando os seguintes limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \right]$$

Se ambos forem finitos, então  $x_0$  é classificado como **ponto singular regular** e existe, na vizinhança deste ponto, uma solução da forma:

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (\text{A.2})$$

Onde  $C_0 \neq 0$  e  $\alpha$  é não necessariamente inteiro.

Se ambos os limites divergirem, então  $x_0$  é classificado como **ponto singular irregular** e não é possível remover a singularidade da equação diferencial, portanto, a mesma pode não admitir uma solução em forma de série [4].

## A.0.2 Equação diferencial de Cauchy-Euler

Uma equação diferencial de Cauchy-Euler tem a forma geral:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (\text{A.3})$$

No entanto, em grande parte dos problemas deste trabalho, surgirão situações onde teremos  $n = 2$ , isto é, uma equação diferencial da forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - l(l+1)y = 0 \quad (\text{A.4})$$

No entanto, nota-se que a equação (A.4) é classificada como uma equação de Cauchy-Euler homogênea, pois nesse caso  $g(x) = 0$  e a mesma tem estrutura semelhante aquela apresentada em (A.3).

Para resolver esta equação utiliza-se o método de Frobenius apresentado na subsecção anterior. Nota-se que  $x = 0$  é um ponto singular regular, então existe uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\mu}$$

Tomando as derivadas tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} C_k (k+\mu) x^{k+\mu-1} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} C_k (k+\mu)(k+\mu-1) x^{k+\mu-2}$$

Substituindo os resultados acima na equação (A.4), tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=0}^{\infty} C_k (k+\mu)(k+\mu-1) x^{k+\mu} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} C_k (k+\mu) x^{k+\mu} - l(l+1) \sum_{m=0}^{\infty} C_k x^{k+\mu} \\ 0 &= \sum_{m=0}^{\infty} C_k [(k+\mu)(k+\mu-1) + 2(k+\mu) - l(l+1)] x^{k+\mu} \\ 0 &= \sum_{m=0}^{\infty} C_k [(k+\mu)(k+\mu+1) - l(l+1)] x^{k+\mu} \end{aligned}$$

Da equação acima, tem-se:

$$(k+\mu)(k+\mu+1) - l(l+1) = 0$$

Sem perder a generalidade desta solução, é possível tomar  $k = 0$  e então:

$$\mu(\mu + 1) = l(l + 1)$$

Da equação acima tem-se os seguintes valores para  $\mu$ :

$$\mu_1 = l \quad \mu_2 = -(l + 1)$$

Visto que, a equação (A.4) é de segunda ordem, então sua solução geral tem a forma:

$$y(x) = C_1 x^l + C_2 x^{-(l+1)} \quad (\text{A.5})$$

### A.0.3 Equação diferencial de Legendre

A equação diferencial de Legendre tem a seguinte forma:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0 \quad n \in \mathbf{R} \quad (\text{A.6})$$

Utilizando o método de Frobenius para resolver essa equação, nota-se que  $x = 0$  é um ponto ordinário, então existe uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Tomando as derivadas da expressão acima, verifica-se que:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2}$$

Substituindo os resultados acima na equação (A.6), verifica-se que:

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

É necessário fazer a seguinte mudança de variável  $n - 2 = k$ , então  $n = k + 2$ . Além disso, quando  $n = 2 \rightarrow k = 0$ . Desse modo, os termos ficam:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2} (k+2)(k+1) x^k - \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Sendo  $k$  um índice de soma, é possível renomear este de maneira conveniente para  $n$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Além disso, note que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1)x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^n$$

Então é correto fazer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1)x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Tomando  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  em evidência, verifica-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n \{n(n-1) + 2n - l(l+1)\}] x^n = 0$$

A equação acima somente é satisfeita se:

$$\begin{aligned} 0 &= C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n \{n(n-1) + 2n - l(l+1)\} \\ 0 &= C_{n+2}(n+2)(n+1) - C_n \{n^2 + n - l^2 - l\} \\ C_{n+2} &= C_n \frac{(n^2 - l^2 + n - l)}{(n+2)(n+1)} \\ C_{n+2} &= C_n \frac{(n+l)(n-l) + (n-l)}{(n+2)(n+1)} \\ C_{n+2} &= C_n \frac{(n+l+1)(n-l)}{(n+2)(n+1)} \\ C_{n+2} &= C_n \frac{n^2 - nl + ln - l^2 + n - l}{(n+2)(n+1)} \\ C_{n+2} &= C_n \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \tag{A.7}$$

Expandindo a solução  $y(x)$ , tem-se:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \dots$$

Utilizando a relação (A.7) é possível calcular alguns dos coeficientes iniciais da série, então:

- Para  $n = 0$ , tem-se  $C_2 = C_0 \frac{-l(l+1)}{2.1}$
- Para  $n = 1$ , tem-se  $C_3 = C_1 \frac{2.1-l(l+1)}{2.3}$
- Para  $n = 2$ , tem-se  $C_4 = C_2 \frac{2.3-l(l+1)}{3.4} = C_0 \frac{l(l+1)[l(l+1)-2.3]}{1.2.3.4}$
- Para  $n = 3$ , tem-se  $C_5 = C_3 \frac{3.4-l(l+1)}{4.5} = C_1 \frac{[3.4-l(l+1)][2.1-l(l+1)]}{1.2.3.4.5}$

Nota-se, dos cálculos acima, que os coeficientes de índices pares ficam em função de  $C_0$  e os coeficientes de índices ímpares ficam em função de  $C_1$ . Desse modo, é possível fazer:

$$y(x) = C_0 \left\{ 1 - \frac{l(l+1)}{2.1}x^2 + \frac{l(l+1)[l(l+1)-2.3]}{1.2.3.4}x^4 + \dots \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$+ C_1 \left\{ x + \frac{[2-l(l+1)]}{2.3}x^3 + \frac{[3.4-l(l+1)][2-l(l+1)]}{1.2.3.4.5}x^5 + \dots \right\}$$

Para obter os polinômios de Legendre, deve-se truncar a série com a condição  $y_l(1) = 1$  [4]. Façamos esse procedimentos para alguns termos da série.

Truncando a série em  $l = 0$ , isto é, no termo de ordem zero, tem-se  $y_0(x) = C_0$ , no entanto, da condição estabelecida anteriormente, tem-se  $y_0(1) = C_0 = 1 \rightarrow C_0 = 1$ . Então, o polinômio de Legendre de ordem zero é:

$$y_0(x) = 1 \equiv P_0(x)$$

Para  $l = 1$ , isto é, truncando a série no termo de ordem um, tem-se  $y_1(x) = C_1x$ . Utilizando a condição  $y_l(1) = 1$ , temos  $y_1(1) = C_1.1 = 1 \rightarrow C_1 = 1$ . Então, o polinômio de Legendre de ordem um é:

$$y_1(x) = x \equiv P_1(x)$$

Para  $l = 2$ , isto é, truncando a série no termo de ordem dois, tem-se

$$y_2(x) = C_0 \left( 1 - \frac{2(2+1)x^2}{1.2} \right)$$

Utilizando a condição  $y_l(1) = 1$ , temos  $y_2(1) = C_0 \left( 1 - \frac{2(2+1)}{1.2} \right) = 1 \rightarrow C_0 = -1/2$ . Então, o polinômio de Legendre de ordem dois é:

$$y_2(x) = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2(2+1)x^2}{1.2} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \equiv P_2(x)$$

Para  $l = 3$ , isto é, truncando a série no termo de ordem três, tem-se

$$y_3(x) = C_1 \left\{ x + \frac{[2 - 3(3+1)x^3]}{1.2.3} \right\}$$

Utilizando a condição  $y_l(1) = 1$ , temos  $y_3(1) = C_1 \left\{ 1 + \frac{[2 - 3(3+1)]}{1.2.3} \right\} = 1 \rightarrow C_1 = -3/2$ .  
Então, o polinômio de Legendre de ordem três é:

$$y_3(x) = -\frac{3}{2} \left\{ x + \frac{[2 - 3(3+1)x^3]}{1.2.3} \right\}$$

$$y_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \equiv P_3(x)$$

Repetindo este processo para  $l = 4$ , encontraremos  $P_4(x)$ , para  $l = 5$ , encontraremos  $P_5(x)$  e assim sucessivamente. Ao final, a solução geral da equação de Legendre será:

$$y(x) = AP_l(x) + BQ_l(x) \tag{A.9}$$

Onde  $P_l$  é chamada de função de Legendre de primeira espécie e grau  $l$  e  $Q_l$  é chamada de função de Legendre de segunda espécie e grau  $l$ . Vale destacar que  $Q_l(\pm 1) \rightarrow \infty$ , isto é, a função de Legendre de segunda espécie diverge nos pontos  $\pm 1$  [4].

Uma forma alternativa de representar os polinômios de Legendre é a fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{A.10}$$

Para este trabalho, a seguinte relação de recorrência entre polinômios de Legendre será útil:

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n(x) \tag{A.11}$$

No entanto, para fins de informação, a relação de recorrência acima não é a única.

### A.0.4 Série de Legendere

Uma série de Legendere é definida da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad (\text{A.12})$$

Isto é,  $f(x)$  pode ser expandida como uma combinação linear dos polinômios de Legendere [4]. A condição de ortogonalidade dos polinômios de Legendere é definida pela seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (\text{A.13})$$

Para calcular os coeficientes  $C_n$  em (A.12), deve-se multiplicar a expressão por um polinômio de Legendere de índice diferente de  $n$  e integrar a equação de -1 até 1 em relação a variável  $x$  [4]. Estes procedimentos resultam em:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) P_m(x) dx \quad (\text{A.14})$$

Sendo o somatório de índice  $n$  independente da variável  $x$ , então é possível permutar o mesmo com a integral, então:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

Nota-se na expressão acima a presença da condição de ortogonalidade para os polinômios de Legendere. Desse modo, tem-se:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (\text{A.15})$$

Ao expandir o somatório na equação acima, pelas propriedades do símbolo Delta de Kronecker, nota-se que o único termo não nulo da expansão será o termo onde o índice  $n = m$ , isto é:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = C_n \frac{2}{2n+1} \quad (\text{A.16})$$

Então, isolando  $C_n$ , tem-se:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

Conhecida a função  $f(x)$ , então é possível integrar a equação acima e encontrar os coeficientes da série de Legendre [4].

### A.0.5 Ortogonalidade das funções trigonométricas

Um sistema de funções composto por  $\{\sin(m\omega x), \cos(n\omega x); n, m = 0, 1, 2, \dots\}$  é ortogonal em um intervalo periódico  $(t, t + T)$ , onde  $T = 2\pi/\omega$  [4]. Sendo assim, tem-se as seguinte relações de ortogonalidade:

$$\int_t^{t+T} \cos(n\omega x) \cos(m\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (\text{A.17})$$

$$\int_t^{t+T} \sin(n\omega x) \sin(m\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (\text{A.18})$$

$$\int_t^{t+T} \cos(n\omega x) \sin(m\omega x) dx = 0 \quad (\text{A.19})$$

### A.0.6 Equação associada de Legendre

A equação diferencial associada de Legendre tem a seguinte forma:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[ l(l + 1) - \frac{m^2}{(1 - x^2)} \right] y = 0 \quad (\text{A.20})$$

E possui como solução polinômios associados de Legendre, que podem ser escritos pela fórmula de Rodrigues da seguinte maneira [4]:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n$$

Ou da forma:

$$y(x) = AP_n^m(x) + BQ_n^m(x) \quad (\text{A.21})$$

Note que, para  $m = 0$  retorna-se ao caso simples da equação de Legendre. Em problemas físicos, por exemplo, os que estão presentes neste trabalho, o significado físico de  $m = 0$  está atrelado à simetria azimutal em coordenadas esféricas.

### A.0.7 Equação diferencial de Bessel

A equação diferencial de Bessel tem a seguinte forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A.22})$$

Utilizando o método de Frobenius para resolver essa equação, nota-se que  $x = 0$  é um ponto singular regular, então existe uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+\alpha}$$

Tomando as derivadas da expressão acima, tem-se:

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha) x^{m+\alpha-1} \quad y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) x^{m+\alpha-2}$$

Substituindo os resultados acima na equação (A.22), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) x^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha) x^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+\alpha+2} - \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m v^2 x^{m+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Fazendo  $p = m + 2$ , então  $m = p - 2$ . Além disso,  $m = 0 \rightarrow p = 2$ . Desse modo, verifica-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) x^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha) x^{m+\alpha} + \sum_{p=2}^{\infty} C_{p-2} x^{p+\alpha} - \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m v^2 x^{m+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Redefinindo o índice de soma  $p = m$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) x^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+\alpha) x^{m+\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2} x^{m+\alpha} - \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m v^2 x^{m+\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Expandindo os demais somatórios até  $m = 2$ , tem-se:

$$C_0 \alpha (\alpha - 1) x^\alpha + C_1 \alpha (\alpha + 1) x^{\alpha+1} + \sum_{m=2}^{\infty} C_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) x^{m+\alpha} +$$

$$C_0 \alpha x^\alpha + C_1 (\alpha + 1) x^{\alpha+1} + \sum_{m=2}^{\infty} C_m (m+\alpha) x^{m+\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2} x^{m+\alpha} - \quad (\text{A.24})$$

$$C_0 v^2 x^\alpha - C_1 v^2 x^{\alpha+1} - \sum_{m=2}^{\infty} C_m v^2 x^{m+\alpha} = 0$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \{ [(m + \alpha)(m + \alpha - 1) + (m + \alpha) - v^2] C_m + C_{m-2} \} +$$

$$x^\alpha C_0 [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - v^2] \tag{A.25}$$

$$+ x^{\alpha+1} C_1 [\alpha(\alpha + 1) + \alpha + 1 - v^2] = 0$$

Da equação acima é possível extrair as seguintes relações:

$$C_0 [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - v^2] = 0$$

$$C_0 [\alpha(\alpha - 1 + 1) - v^2] = 0$$

$$C_0 (\alpha^2 - v^2) = 0 \tag{A.26}$$

$$C_1 [\alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1) - v^2] = 0$$

$$C_1 [(\alpha + 1)(\alpha + 1) - v^2] = 0$$

$$C_1 [(\alpha + 1)^2 - v^2] = 0 \tag{A.27}$$

$$[(m + \alpha)(m + \alpha - 1) + (m + \alpha) - v^2] C_m + C_{m-2} = 0$$

$$\frac{-C_{m-2}}{[(m + \alpha)^2 - v^2]} = C_m \tag{A.28}$$

Analisando as relações anteriores, tem-se as seguintes possibilidades:

- Admitindo  $C_0 \neq 0$ , então  $(\alpha^2 - v^2) = 0 \rightarrow \alpha = \pm v$ . No entanto, este resultado implica em  $C_1 = 0$
- Admitindo  $C_1 \neq 0$ , então  $(\alpha + 1)^2 - v^2 = 0 \rightarrow \alpha = \pm v - 1$ . No entanto, este resultado implica  $C_0 = 0$ .

Escolhendo a primeira possibilidade, isto é,  $C_0 \neq 0$ ,  $C_1 = 0$ , porém escolhe-se  $\alpha = +v$ . Desse modo, em (A.28), tem-se a seguinte relação de recorrência entre os coeficientes:

$$C_m = \frac{-C_{m-2}}{[(m + v)^2 - v^2]} = \frac{-C_{m-2}}{k(k + 2v)} \tag{A.29}$$

Expandindo a solução  $y(x)$ , tem-se:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+v} = C_0 x^v + C_1 x^{v+1} + C_2 x^{v+2} + C_3 x^{v+3} + \dots$$

Nota-se, da relação de recorrência (A.28), que os coeficientes de índices ímpares podem ser escritos como um produto onde um dos fatores é  $C_1$ . Se estamos considerando  $C_1 = 0$ , então conclui-se que os coeficientes de índices ímpares serão nulos. Desse modo, tem-se:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+v} = C_0 x^v + C_2 x^{v+2} + C_4 x^{v+4} + C_6 x^{v+6} \dots \quad (\text{A.30})$$

Utilizando a relação (A.28) é possível expandir os três primeiros coeficientes da expansão acima<sup>1</sup>:

- Para  $m = 2$ , tem-se  $C_2 = \frac{-C_0}{2^2(1+v)}$
- Para  $m = 4$ , tem-se  $C_4 = \frac{-C_2}{2^2 \cdot 2(2+v)} = \frac{-C_0}{1 \cdot 2 \cdot 2^4(2+v)(1+v)}$
- Para  $m = 6$ , tem-se  $C_6 = \frac{-C_4}{3 \cdot 2^2(3+v)} = \frac{-C_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^6(3+v)(2+v)(1+v)}$

É possível expandir quantos coeficientes forem desejados, no entanto, foram obtidos somente três para ficar mais prática e didática a manipulação matemática que será feita a seguir.

Substituindo os coeficientes calculados acima na equação (A.30) e colocando o fator  $C_0 x^v$  em evidência, tem-se:

$$y(x) = C_0 x^v \left[ \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{1!2^2(1+v)} + \frac{x^4}{2!2^4(2+v)(1+v)} - \frac{x^6}{3!2^6(3+v)(2+v)(1+v)} + \dots \right]$$

Fazendo:

$$y(x) = \frac{C_0 x^v 2^v v!}{2^v} \frac{1}{0!v!} - \frac{C_0 x^v 2^v v!}{2^v} \frac{x^2}{1!v!2^2(1+v)} + \frac{C_0 x^v 2^v v!}{2^v} \frac{x^4}{2!v!2^4(2+v)(1+v)} - \frac{C_0 x^v 2^v v!}{2^v} \frac{x^6}{3!v!2^6(3+v)(2+v)(1+v)} + \dots \quad (\text{A.31})$$

Generalizando a expansão acima para  $m$  e  $v$ , tem-se:

<sup>1</sup> É importante destacar que  $C_0$  não decorre da relação (A.28), pois já foi definido que  $m = 0 \rightarrow C_0$ , isto é,  $C_0$  é conhecido, só não sabemos explicitamente sua forma.

$$y(x) = C_0 \nu! 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

$$y(x) = \nu! 2^\nu C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

Da expressão acima, define-se a função de Bessel  $J_\nu$ :

$$J_\nu(x) = D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (\text{A.32})$$

Define-se  $D = 2^\nu C_0 \nu!$ . Note que  $J_\nu(0) = 0$  pra  $\nu$  real e positivo. Lembrando que o resultado acima é para  $\alpha = +\nu$ . De maneira análoga, para  $\alpha = -\nu$ , tem-se:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} \quad (\text{A.33})$$

Por fim, a solução geral da equação de Bessel é dada por:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad \nu \in \mathbf{C} \quad (\text{A.34})$$

A solução acima é válida desde que  $\nu$  não seja um número inteiro, pois caso isso ocorra, as soluções  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  serão linearmente dependentes e  $y(x)$  não será solução da equação de Bessel [4].

Sendo assim, existe a necessidade de encontrar uma função tal que, se  $\nu = n \in \mathbf{Z}$  então  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  sejam linearmente independentes [4]. A função que atende essa exigência é a chamada função de Neumann, definida da seguinte forma de acordo com [4]:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - (-1)^\nu \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right] \quad (\text{A.35})$$

Dessa forma, a solução geral da equação de Bessel fica:

$$y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x) \quad (\text{A.36})$$

Uma característica importante para este trabalho em relação à função de Neumann é que a mesma diverge na origem, isto é,  $N_n(0) \rightarrow \infty$  [4].

## A.0.8 Laplaciano em coordenadas cartesianas

Solução da equação de Laplace para coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.37})$$

A equação acima é resolvida pelo método da separação de variáveis [5], isto é, faz-se:

$$f(x,y,z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$$

Em seguida, faz-se a segunda derivada da equação acima em relação à  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) \} = \beta(y)\gamma(z) \frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) \} = \alpha(x)\gamma(z) \frac{\partial^2 \beta(y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) \} = \alpha(x)\beta(y) \frac{\partial^2 \gamma(z)}{\partial z^2}$$

Utilizando a notação de derivada de Lagrange, tem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \beta\gamma\alpha''$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\gamma\beta''$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \alpha\beta\gamma''$$

Substituindo os resultados acima em (A.37), tem-se:

$$\beta\gamma\alpha'' + \alpha\gamma\beta'' + \alpha\beta\gamma'' = 0$$

Sendo  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , então, multiplicando a equação acima pelo termo  $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$  tem-se:

$$\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} = 0$$

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = - \left[ \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} \right] \quad (\text{A.38})$$

Na equação acima nota-se que, no membro esquerdo, tem-se uma função que depende somente de  $x$  e no membro direito tem-se uma função que depende de  $y$  e  $z$ , então a igualdade acima somente será satisfeita quando ambas as funções assumirem valor constante.

Visto que, busca-se uma solução com um comportamento específico então escolhemos uma constante adequada  $-\eta_x^2$ . Então:

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = - \left[ \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} \right] = -\eta_x^2$$

Da equação acima, tem-se a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha''}{\alpha} &= -\eta_x^2 \\ \alpha'' &= -\eta_x^2 \alpha \\ 0 &= \alpha'' + \eta_x^2 \alpha \end{aligned}$$

A solução da equação acima é dada por:

$$\alpha(x) = C_1 \cos(\eta_x x) + C_2 \sin(\eta_x x) \quad (\text{A.39})$$

Da equação (A.38), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} &= \eta_x^2 \\ \frac{\beta''}{\beta} &= \eta_x^2 - \frac{\gamma''}{\gamma} \end{aligned}$$

Utilizando argumentos semelhantes aos anteriores, a equação acima somente será satisfeita quando as funções no membro esquerdo e direito da igualdade assumirem valores constantes. Escolhendo a constante  $-\eta_y^2$ , tem-se:

$$\frac{\beta''}{\beta} = \eta_x^2 - \frac{\gamma''}{\gamma} = -\eta_y^2$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\beta''}{\beta} &= -\eta_y^2 \\ \beta'' &= -\eta_y^2 \beta \\ 0 &= \beta'' + \eta_y^2 \beta \end{aligned}$$

A solução da equação acima é dada por:

$$\beta(y) = C_3 \cos(\eta_y y) + C_4 \sin(\eta_y y) \quad (\text{A.40})$$

Agora, substituindo as equações as constantes escolhidas na expressão  $\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} = 0$ , tem-se:

$$-\eta_x^2 - \eta_y^2 + \frac{\gamma''}{\gamma} = 0$$

$$\frac{\gamma''}{\gamma} = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

A equação acima indica que o membro esquerdo, onde há uma dependência da variável  $z$ , deve assumir valor constante. Escolhendo uma constante  $\eta_k^2$ , tem-se:

$$\frac{\gamma''}{\gamma} = \eta_k^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 \rightarrow \eta_k = [\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2}$$

$$\gamma' = \eta_k^2 \gamma$$

$$\gamma' - \eta_k^2 \gamma = 0$$

A solução da equação acima é dada por:

$$\gamma(z) = C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z) \quad (\text{A.41})$$

Substituindo os resultados (A.39), (A.40) e (A.41) em  $f = \alpha\beta\gamma$  tem-se uma solução para a função  $f(x, y, z)$ .

$$f(x, y, z) = [C_1 \cos(\eta_x x) + C_2 \sin(\eta_x x)][C_3 \cos(\eta_y y) + C_4 \sin(\eta_y y)] \times \\ \times [C_5 \cosh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z) + C_6 \sinh([\eta_x^2 + \eta_y^2]^{1/2} z)] \quad (\text{A.42})$$

### A.0.9 Laplaciano em coordenadas cilíndricas

Solução da equação de Laplace para coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$ .

$$\nabla^2 g(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.43})$$

Para resolver a equação acima, recorreremos ao método da separação de variáveis [5], então faz-se:

$$g(\rho, \phi, z) = \xi(\rho)\psi(\phi)\omega(z)$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \xi' \psi \omega$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} = \xi \psi'' \omega$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \omega^2} = \xi \psi \omega''$$

Substituindo os resultados acima no laplaciano, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \xi' \psi \omega) + \frac{1}{\rho^2} \xi \psi'' \omega + \xi \psi \omega'' = 0$$

$$\frac{\psi \omega}{\rho} [\xi' + \rho \xi''] + \frac{1}{\rho^2} \xi \psi'' \omega + \xi \psi \omega'' = 0$$

$$\frac{\psi \omega \xi'}{\rho} + \psi \omega \xi'' + \frac{1}{\rho^2} \xi \psi'' \omega + \xi \psi \omega'' = 0$$

Multiplicando a equação acima por  $\frac{1}{\xi \psi \omega}$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{\rho \xi} + \frac{\xi''}{\xi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\psi''}{\psi} + \frac{\omega''}{\omega} &= 0 \\ \frac{\xi'}{\rho \xi} + \frac{\xi''}{\xi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\psi''}{\psi} &= -\frac{\omega''}{\omega} \end{aligned}$$

A equação acima somente é satisfeita quando ambos os membros da igualdade assumirem valor constante. Escolhendo uma constante adequada  $-\lambda^2$ , tem-se:

$$\frac{\xi'}{\rho \xi} + \frac{\xi''}{\xi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\psi''}{\psi} = -\frac{\omega''}{\omega} = -\lambda^2 \quad (\text{A.44})$$

Resolvendo primeiramente para a função  $\omega$ , a qual exige que a constante tenha argumento complexo, isto é  $-(i\lambda)^2$ , então tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega''}{\omega} &= -(i\lambda)^2 \\ \omega'' &= \omega(i\lambda)^2 \\ 0 &= \omega''(z) - \omega(z)(i\lambda)^2 \end{aligned}$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$\omega(z) = K_1 \cos(\lambda z) + K_2 \sin(\lambda z) \quad (\text{A.45})$$

Resolvendo a equação (A.44) para  $\psi$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\xi'}{\xi} + \rho^2 \frac{\xi''}{\xi} + \frac{\psi''}{\psi} &= -\lambda^2 \rho^2 \\ \rho \frac{\xi'}{\xi} + \rho^2 \frac{\xi''}{\xi} + \frac{\psi''}{\psi} + \lambda^2 \rho^2 &= -\frac{\psi''}{\psi} \end{aligned}$$

A equação acima somente é satisfeita quando ambos os membros assumirem valor constante. Escolhendo uma constante adequada para obtermos resultados oscilatórios para  $\psi$ , escolhe-se  $n^2$ . Então:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\xi'}{\xi} + \rho^2 \frac{\xi''}{\xi} + \frac{\psi''}{\psi} + \lambda^2 \rho^2 &= -\frac{\psi''}{\psi} = n^2 \\ -\frac{\psi''}{\psi} &= n^2 \\ \psi'' &= -n^2 \psi \\ 0 &= \psi''(\phi) + n^2 \psi(\phi) \end{aligned}$$

A equação acima tem solução do tipo:

$$\psi(\phi) = K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi) \quad (\text{A.46})$$

Finalmente, resolvendo (A.44) para a função  $\xi(\rho)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\xi'}{\xi} + \rho^2 \frac{\xi''}{\xi} + \lambda^2 \rho^2 &= n^2 \\ \rho \frac{\xi'}{\xi} + \rho^2 \frac{\xi''}{\xi} + \lambda^2 \rho^2 - n^2 &= 0 \\ \rho^2 \xi'' + \rho \xi' + (\lambda^2 \rho^2 - n^2) \xi &= 0 \end{aligned}$$

A equação diferencial acima é a equação de Bessel e sua solução, como apresentada na subseção A.0.6, é dada pela equação (A.36), então, para esse caso, tem-se:

$$\xi(\rho) = K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho) \quad (\text{A.47})$$

Substituindo as equações (A.45), (A.46) e (A.47) em  $g = \xi \psi \omega$ , tem-se uma solução geral para  $g(\rho, \phi, z)$ :

$$g(\rho, \phi, z) = [K_5 J_n(\lambda \rho) + K_6 N_n(\lambda \rho)][K_3 \cos(n\phi) + K_4 \sin(n\phi)][K_1 \cos(\lambda z) + K_2 \sin(\lambda z)] \quad (\text{A.48})$$

### A.0.10 Laplaciano em coordenadas esféricas

Solução da equação de Laplace para coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

$$\nabla^2 h(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A.49})$$

A equação acima é resolvida pelo método da separação de variáveis [5], isto é, faz-se:

$$h(r, \theta, \phi) = a(r)b(\theta)c(\phi)$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = a'bc$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = ab'c$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = abc''$$

Substituindo os resultados acima no laplaciano, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a'bc) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta ab'c) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} abc'' &= 0 \\ bc \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a') + ac \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b') + ab \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} c'' &= 0 \\ bc \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a') + ac \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b') + ab \frac{1}{(\sin \theta)^2} c'' &= 0 \\ bc [2ra' + r^2 a''] + ac \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] + ab \frac{1}{(\sin \theta)^2} c'' &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Sendo  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , então, multiplicando a equação acima pelo termo  $\frac{1}{abc}$  tem-se:

$$\frac{(\sin \theta)^2}{a} [2r\alpha' + r^2 a''] + \frac{(\sin \theta)^2}{b} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] = -\frac{c''}{c}$$

A equação acima somente é satisfeita quando ambos os membros assumirem valor constante. É escolhida uma constante adequada  $m^2$ . Então:

$$\frac{(\sin \theta)^2}{a} [2r\alpha' + r^2 a''] + \frac{(\sin \theta)^2}{b} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] = -\frac{c''}{c} = m^2$$

Então, da equação acima, obtém-se:

$$-\frac{c''}{c} = m^2$$

$$c''(\phi) + m^2 c(\phi) = 0$$

A equação acima tem solução do tipo:

$$c(\phi) = K_3 \cos(m\phi) + K_4 \sin(m\phi) \quad (\text{A.51})$$

Resolvendo para  $b(\theta)$ , tem-se:

$$\frac{1}{a} [2r\alpha' + r^2 a''] = -\frac{1}{b} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] + \frac{m^2}{(\sin \theta)^2}$$

A equação acima somente é satisfeita quando ambos os membros assumirem valor constante. É escolhida uma constante adequada  $l(l+1)$ . Então:

$$\frac{1}{a} [2r\alpha' + r^2 a''] = -\frac{1}{b} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] + \frac{m^2}{(\sin \theta)^2} = l(l+1)$$

Então, da equação acima, obtém-se:

$$-\frac{1}{b} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + b'' \right] + \frac{m^2}{(\sin \theta)^2} - l(l+1) = 0$$

$$b'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{(\sin \theta)^2} \right] b = 0 \quad (\text{A.52})$$

Para deixar as manipulações matemáticas a seguir mais didáticas e claras é conveniente reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{d^2 b}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{(\sin \theta)^2} \right] b(\theta) = 0 \quad (\text{A.53})$$

Em seguida, fazemos a seguinte substituição de variável  $x = \cos \theta \rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$ . Então, escrevemos  $\frac{d}{d\theta}$  da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} \quad (\text{A.54})$$

Para a derivada segunda em  $\theta$ , tem-se:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d}{d\theta} \right)$$

No entanto, sabe-se que  $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ . Então:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( -\sin \theta \frac{d}{dx} \right) \\ \frac{d^2}{d\theta^2} &= -\cos \theta \frac{d}{dx} - \sin \theta \frac{d}{d\theta} \frac{d}{dx} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} &= -\cos \theta \frac{d}{dx} - \sin \theta \left( -\sin \theta \frac{d}{dx} \right) \frac{d}{dx} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} &= -\cos \theta \frac{d}{dx} + (\sin \theta)^2 \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Substituindo as equações (A.54) e (A.55) em (A.53), tem-se:

$$\begin{aligned} -\cos \theta \frac{db}{dx} + (\sin \theta)^2 \frac{d^2b}{dx^2} + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) (-\sin \theta) \frac{db}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{(\sin \theta)^2} \right] b &= 0 \\ [1 - (\cos \theta)^2] \frac{d^2b}{dx^2} - 2\cos \theta \frac{db}{dx} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{[1 - (\cos \theta)^2]} \right\} b &= 0 \end{aligned}$$

Lembrando que definimos  $x = \cos \theta$ , então a equação acima tem a forma:

$$(1-x^2) \frac{d^2b}{dx^2} - 2x \frac{db}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] b = 0$$

No entanto, como vimos na subseção A.0.5, esta é a equação associada de Legendre, que tem solução da forma:

$$b(x) = K_5 P_l^m(x) + K_6 Q_l^m(x)$$

Agora deve-se retornar a variável original, e a solução geral da equação (A.53) é:

$$b(\theta) = K_5 P_l^m(\cos \theta) + K_6 Q_l^m(\cos \theta) \quad (\text{A.56})$$

Em seguida, resolvemos para  $a(r)$ .

$$\frac{1}{a} [2r\alpha' + r^2 a''] = l(l+1)$$

$$r^2 a'' + 2r\alpha' - l(l+1)a = 0$$

A equação acima é a equação diferencial de Cauchy-Euler de segunda ordem homogênea, e como vimos na subseção A.0.2, esta equação tem solução da forma:

$$a(r) = K_1 r^l + K_2 r^{-(l+1)} \quad (\text{A.57})$$

Por fim, substituindo as equações (A.51), (A.56) e (A.57) em  $h = abc$ , tem-se:

$$h(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [K_{1l} r^l + K_{2l} r^{-(l+1)}] [K_{3l} \cos(m\phi) + K_{4l} \sin(m\phi)] \times [K_{5l} P_l^m(\cos \theta) + K_{6l} Q_l^m(\cos \theta)] \quad (\text{A.58})$$

Note que, os somatórios aparecem devido a dependência desta solução geral em relação aos parâmetros  $l$  e  $m$ . Além disso, para maior generalidade da solução, assume-se que as constantes dependem também dos parâmetros  $l$  e  $m$ .

Para o caso onde existe simetria azimutal, isto é, a função solução não depende de  $\phi$  então  $m = 0$ , conseqüentemente o laplaciano fica:

$$\nabla^2 h(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{A.59})$$

E sua solução é dada por:

$$h(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] [C_l P_l(\cos \theta) + D_l Q_l(\cos \theta)] \quad (\text{A.60})$$

## APÊNDICE B – SCRIPTS DAS PLOTAGENS EM PYTHON

```

1 #Importa as bibliotecas numpy, math, matplotlib e scipy.special
2 import numpy as np
3 import math as m
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.special import eval_legendre
6
7 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
8 plt.rcParams['text.usetex'] = True
9 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
10 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
11 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
12 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
13 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
14 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
15 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
17 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
18
19 V = 1      #Define valor 1 potencial na superficie da esfera
20 a = 1      #Define valor 1 para o raio da esfera
21 NPoints = 100 #Define o numero de pontos na grade
22
23 #Define (inicio, fim, numero de pontos) na direcao radial
24 r = np.linspace(0, a, NPoints)
25
26 #Define (inicio, fim, numero de pontos) na direcao angular theta
27 theta = np.linspace(0, np.pi, NPoints)
28
29 #Define e calcula a funcao do potencial em cada ponto da grade
30 def Pot_prob_1(r, theta, lmax, V=1):
31     f = 0
32     for l in range(1, lmax+1):
33         coef = ((-1)**l*m.factorial(2*l)/(2**(2*l)*(m.factorial(l))**2*a
34                 *(2*l+1)))*((4*l+3)/(2*l+2))
35         f += V*coef*r**(2*l+1)*eval_legendre(2*l+1,np.cos(theta))
36     return f
37
38 #Cria um laco para plot das curvas de 0 ata 180 graus (variando nos
39 polinomios de Legendre)
40 angulos = [r"$0$", r"$\pi/6$", r"$\pi/3$", r"$\pi/2$", r"$2\pi/3$", r"$5
    \pi/6$", r"$\pi$"]
41 for i in range(0,7):
42     y = Pot_prob_1(r, i*np.pi/6, 10)

```

```
41 plt.plot(r,y, label=r"$\theta$" + "=" + f"{angulos[i]}")
42
43 plt.grid()      #Plota a grade
44
45 #Plota a caixa com legendas para cada angulo
46 plt.legend(loc="upper left")
47
48 plt.xlim(0, a)      #Define os limite da direcao x de 0 ate a
49 plt.ylim(-0.4, 0.5) #Define os limite da direcao y de -0.4 a 0.5
50 plt.xlabel(r"$r$", fontsize=16) #Define a legenda em x
51 plt.ylabel(r"$V(r,\theta)$", fontsize=16) #Define a legenda em y
52 plt.savefig("potencial_prob_1.png", dpi=500) #Salva a Figura
53 plt.show()      #Mostra a Figura final
```

Código B.1 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 8 referente ao problema 1

```

1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d, art3d
5
6 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
7 plt.rcParams['text.usetex'] = True
8 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
10 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
11 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
12 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
13 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
14 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
15 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
17
18 a = 4 #Define valor 4 para a
19 b = 4 #Define valor 4 para b
20 c = 4 #Define valor 4 para c
21 U = 2 #Define valor 2 para U
22 U_prime = 1 #Define valor 1 para U'
23
24 #Define a funcao vetorial em cada ponto do espaco
25 def vector_field(x, y, z):
26     nmax = 50 #Valor maximo de n
27     mmax = 50 #Valor maximo de m
28     Ex = 0
29     for n in range(1, nmax+1):
30         for m in range(1, mmax+1):
31             knm = np.sqrt((n*np.pi/a)**2 + (m*np.pi/b)**2)
32             term1 = 16*U_prime*np.cosh(knm*z)/( (2*n-1)*(2*m-1)*(np.pi
33                 **2) )
34             term2 = 16*(U - U_prime*np.cosh(knm*c)*np.sinh(knm*z))/( (2*
35                 n-1)*(2*m-1)*(np.pi**2)*np.sinh(knm*c) )
36             term3 = n*np.pi/a * np.cos(n*np.pi/a * x) * np.sin(m*np.pi/b
37                 * y)
38             Ex += term3 * (term1 + term2)
39
40     Ey = 0
41     for n in range(1, nmax+1):
42         for m in range(1, mmax+1):
43             knm = np.sqrt((n*np.pi/a)**2 + (m*np.pi/b)**2)
44             term4 = 16*U_prime*np.cosh(knm*z)/( (2*n-1)*(2*m-1)*(np.pi
45                 **2) )
46             term5 = 16*(U - U_prime*np.cosh(knm*c)*np.sinh(knm*z))/( (2*
47                 n-1)*(2*m-1)*(np.pi**2)*np.sinh(knm*c) )
48             term6 = m*np.pi/b * np.sin(n*np.pi/a * x) * np.cos(m*np.pi/b

```

```

        * y)
43     Ey += term6 * (term4 + term5)
44     Ez = 0
45     for n in range(1, nmax+1):
46         for m in range(1, mmax+1):
47             knm = np.sqrt((n*np.pi/a)**2 + (m*np.pi/b)**2)
48             term7 = 16*U_prime*knm*np.sinh(knm*z)/((2*n-1)*(2*m-1)*(np.
                pi**2) )
49             term8 = 16*(U - U_prime*knm*np.cosh(knm*c)*np.cosh(knm*z))/((
                (2*n-1)*(2*m-1)*(np.pi**2)*np.sinh(knm*c) )
50             term9 = np.sin(n*np.pi/a * x) * np.sin(m*np.pi/b * y)
51             Ez += term9 * (term7 + term8)
52     return Ex, Ey, Ez
53
54 Nx = 6 #Numero de pontos na direcao x
55 Ny = 6 #Numero de pontos na direcao y
56 Nz = 6 #Numero de pontos na direcao z
57
58 # Define a grade tridimensional
59 x, y, z = np.meshgrid(np.linspace(0, a, Nx),
60                       np.linspace(0, b, Ny),
61                       np.linspace(0, c, Nz))
62
63 #Calcula a funcao vetorial em cada ponto do espaco
64 vx, vy, vz = vector_field(x, y, z)
65
66 #Cria a Figura e o referencial 3D
67 fig = plt.figure()
68 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
69
70 #Plota o campo vetorial
71 ax.quiver(x, y, z, vx, vy, vz, length=0.4, alpha=1.0, normalize=True)
72
73 ax.set_xlabel('X') #Insere a legenda da direcao x
74 ax.set_ylabel('Y') #Insere a legenda da direcao y
75 ax.set_zlabel('Z') #Insere a legenda da direcao z
76
77 ax.view_init(30, -60) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. 0
    valor padrao e ax.view_init(30, -60).
78 plt.savefig("campo_eletrico_prob_2_3D.png", dpi=500) #Salva a Figura
79
80 plt.show() #Mostra a Figura final

```

Código B.2 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 10 referente ao problema 2



```
45 #Converte as coordenadas cartesianas para cilindricas
46 X = Rho*np.cos(Phi)
47 Y = Rho*np.sin(Phi)
48
49 #Avalia a funcao vetorial definida em cada ponto do espaco
50 Erho, Ephi, Ez = cyl_vector_field(Rho, Phi, Z)
51
52 fig = plt.figure() #Define a variavel vazia para a plotagem da Figura
53
54 #Cria a Figura a ser plotada e o sistema de referencia em 3D
55 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
56
57 #Plotagem das flechas de campo em funcao das coordenadas cartesianas
58 ax.quiver(X, Y, Z, Erho, Ephi, Ez, length=0.3, color="cornflowerblue",
           normalize=True)
59
60 ax.set_xlabel('X') #Insere a legenda da direcao x
61 ax.set_ylabel('Y') #Insere a legenda da direcao y
62 ax.set_zlabel('Z') #Insere a legenda da direcao z
63
64 ax.set_zlim(0,2) #Define os limites da direcao z
65
66 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.3 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 12 referente ao problema 3

```
1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib e mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6
7 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
8 plt.rcParams['text.usetex'] = True
9 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
10 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
11 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
12 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
13 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
14 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
15 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
17 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
18
19 #Definindo a grade de coordenadas esfericas
20 D = 4 #Define valor 4 para o raio da esfera
21
22 #Define (inicio, fim, numero de pontos) na direcao radial
23 r = np.linspace(0, R, 5)
24
25 #Define (inicio, fim, numero de pontos) na direcao theta
26 theta = np.linspace(0, np.pi, 8)
27
28 #Define (inicio, fim, numero de pontos) na direcao phi
29 phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 10)
30
31 # Definindo as componentes do campo vetorial em coordenadas esfericas
32 def vector_field(R, THETA, PHI):
33     H_0 = 2 #Define valor 2 ao campo magnetico externo
34     mu = 2 #Define valor 2 a permeabilidade magnetica da esfera
35
36     #Componente radial do campo magnetico
37     Hr = (3*H_0/(2+mu))*np.cos(THETA)
38
39     #Componente angular theta do campo magnetico
40     Htheta = -(3*H_0/(2+mu))*np.sin(THETA)
41
42     #Componente angular phi do campo magnetico
43     Hphi = 0
44     return Hr, Htheta, Hphi
45
46 #Define a grade em coordenadas esfericas
47 R, THETA, PHI = np.meshgrid(r, theta, phi)
```

```
48
49 #Calcula o valor da funcao vetorial em cada ponto do espaco
50 Hr, Htheta, Hphi = vector_field(R, THETA, PHI)
51
52 #Convertendo as componentes para coordenadas cartesianas
53 X = R * np.sin(THETA) * np.cos(PHI)
54 Y = R * np.sin(THETA) * np.sin(PHI)
55 Z = R * np.cos(THETA)
56
57 #Criando a Figura e o objeto de plotagem
58 fig = plt.figure()
59 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
60
61 #Plotando o campo vetorial
62 ax.quiver(X, Y, Z, Hr, Htheta, Hphi, length=0.8, normalize=True,
        arrow_length_ratio=0.5)
63
64 ax.set_xlabel("X") #Insere a legenda da direcao x
65 ax.set_ylabel("Y") #Insere a legenda da direcao y
66 ax.set_zlabel("Z") #Insere a legenda da direcao z
67 ax.view_init(30, -60) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. O
        valor padrao e ax.view_init(30, -60).
68 plt.savefig("campo_magnetico_interno_prob_4.png", dpi=500) #Salva a
        Figura
69
70 #Simulando a superficie da esfera
71 u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:50j, 0:np.pi:25j]
72 x = 4*np.cos(u)*np.sin(v)
73 y = 4*np.sin(u)*np.sin(v)
74 z = 4*np.cos(v)
75
76 #Plotando a superficie esferica
77 ax.plot_surface(x, y, z, color='coral', alpha=0.5)
78
79 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.4 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 14 referente ao problema 4

```
1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib e mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
7 plt.rcParams['text.usetex'] = True
8 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
10 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
11 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
12 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
13 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
14 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
15 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
17
18 #Definindo a grade de coordenadas esfericas
19 r = np.linspace(4, 8, 1) #Define (inicio, fim, numero de pontos) na
    direcao radial
20 theta = np.linspace(0, np.pi, 20) #Define (inicio, fim, numero de
    pontos) na direcao theta
21 phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 20) #Define (inicio, fim, numero de pontos
    ) na direcao phi
22
23 #Definindo as componentes do campo vetorial em coordenadas esfericas
24 def vector_field(R, THETA, PHI):
25     D = 4 #Raio da esfera
26     H_0 = 2 #Campo magnetico externo
27     mu = 2 #Permeabilidade magnetica da esfera
28     Hr = H_0*np.cos(THETA)*(1 + 2*(D/R)**3*((mu-1)/(mu+2)))
29     Htheta = -H_0*np.sin(THETA)*(1 + (D/R)**3*((mu-1)/(mu+2)))
30     Hphi = 0
31     return Hr, Htheta, Hphi
32
33 #Componente radial do campo magnetico
34 Hr = H_0*np.cos(THETA)*(1 + 2*(D/R)**3*((mu-1)/(mu+2)))
35
36 #Componente angular theta do campo magnetico
37 Htheta = -H_0*np.sin(THETA)*(1 + (D/R)**3*((mu-1)/(mu+2)))
38
39 #Componente angular phi do campo magnetico
40 Hphi = 0
41 return Hr, Htheta, Hphi
42
43 #Definir a grade em coordenadas esfericas
44 R, THETA, PHI = np.meshgrid(r, theta, phi)
```

```
45
46 #Calcula o valor da funcao vetorial em cada ponto do espaco
47 Hr, Htheta, Hphi = vector_field(R, THETA, PHI)
48
49 #Convertendo as componentes para coordenadas cartesianas
50 X = R * np.sin(THETA) * np.cos(PHI)
51 Y = R * np.sin(THETA) * np.sin(PHI)
52 Z = R * np.cos(THETA)
53
54 #Criando a Figura e o objeto de plotagem
55 fig = plt.figure()
56 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
57
58 #Plotando o campo vetorial
59 ax.quiver(X, Y, Z, Hr, Htheta, Hphi, length=0.5, normalize=True, color="
    indigo", alpha=1.0)
60
61 ax.set_xlabel("X") #Insere a legenda da direcao x
62 ax.set_ylabel("Y") #Insere a legenda da direcao y
63 ax.set_zlabel("Z") #Insere a legenda da direcao z
64 ax.view_init(30, -60) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. 0
    valor padrao e ax.view_init(30, -60).
65 plt.savefig("campo_magnetico_externo_prob_4.png", dpi=500) #Salva a
    Figura
66
67 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.5 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 15 referente ao problema 4

Note que, no script, a variável que recebe o valor do raio da esfera é D, e no problema 4 o raio da esfera é representado por R. Essa troca foi realizada, pois a coordenada radial no Python já estava sendo representada por R, sendo assim, se duas variáveis iguais representassem parâmetros distintos, ao executar o código, haveria um erro na compilação do script.

```
1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib e mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
7 plt.rcParams['text.usetex'] = True
8 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
10 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
11 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
12 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
13 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
14 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
15 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
17
18 # Definindo a grade de coordenadas esfericas
19 r = np.linspace(0, 4, 4) #Define (inicio, fim, numero de pontos) na
    direcao radial
20 theta = np.linspace(0, np.pi, 8) #Define (inicio, fim, numero de pontos)
    na direcao angular theta
21 phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 8) #Define (inicio, fim, numero de pontos)
    na direcao angular phi
22
23
24 # Definindo as componentes do campo vetorial em coordenadas esfericas
25 def vector_field(R, THETA, PHI):
26     #Define valor 1 para a permeabilidade magnetica da esfera
27     mu_0 = 1
28
29     #Define valor 3 para a densidade de cargas superficial da esfera
30     sigma = 3
31
32     D = 4 #Define valor 4 para o raio da esfera
33     omega = 3 #Define valor 3 para a velocidade angular da esfera
34
35     #Componente radial
36     Br = (2*mu_0*sigma*D*omega/3)*np.cos(THETA)
37
38     #Componente angular theta
39     Btheta = -(2*mu_0*sigma*D*omega/3)*np.sin(THETA)
40
41     #Componente angular phi
42     Bphi = 0
43
44     return Br, Btheta, Bphi
```

```
45
46 #Definir a grade em coordenadas esfericas
47 R, THETA, PHI = np.meshgrid(r, theta, phi)
48
49 #Calcula o valor da funcao vetorial em cada ponto do espaco
50 Br, Btheta, Bphi = vector_field(R, THETA, PHI)
51
52 #Convertendo as componentes para coordenadas cartesianas
53 X = R * np.sin(THETA) * np.cos(PHI)
54 Y = R * np.sin(THETA) * np.sin(PHI)
55 Z = R * np.cos(THETA)
56
57 #Criando a Figura e o objeto de plotagem
58 fig = plt.figure()
59 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
60
61 #Plotando o campo vetorial
62 ax.quiver(X, Y, Z, Br, Btheta, Bphi, length=0.7, arrow_length_ratio=0.5,
63          normalize=True, color="red")
64
65 ax.set_xlabel('X') #Insere legenda na direcao x
66 ax.set_ylabel('Y') #Insere legenda na direcao y
67 ax.set_zlabel('Z') #insere legenda na direcao z
68 ax.view_init(30, -60) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. O
69 valor padrao e ax.view_init(30, -60).
70 plt.savefig("campo_magnetico_interno_prob_5.png", dpi=500)
71
72 #Simulando a superficie da esfera
73 u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:50j, 0:np.pi:25j]
74 x = 4*np.cos(u)*np.sin(v)
75 y = 4*np.sin(u)*np.sin(v)
76 z = 4*np.cos(v)
77
78 # Plotando a superficie esferica
79 ax.plot_surface(x, y, z, color='yellow', alpha=0.5)
80
81 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.6 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 18 referente ao problema 5

```
1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib e mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 #Defini o dos parametros esteticos do grafico final
7 plt.rcParams['text.usetex'] = True
8 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
10 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
11 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
12 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
13 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
14 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
15 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
17
18 # Definindo a grade de coordenadas esf ricas
19 r = np.linspace(4, 8, 6) #Define (inicio, fim, numero de pontos) na
    direcao radial
20 theta = np.linspace(0, np.pi, 8) #Define (inicio, fim, numero de pontos)
    na direcao angular theta
21 phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 8) #Define (inicio, fim, numero de pontos)
    na direcao angular phi
22
23
24 # Definindo as componentes do campo vetorial em coordenadas esf ricas
25 def vector_field(R, THETA, PHI):
26     mu_0 = 1 #Define valor 1 para a permeabilidade magnetica da
        esfera
27     sigma = 3 #Define valor 3 para a densidade de cargas superficial
        da esfera
28     D = 4 #Define valor 4 para o raio da esfera
29     omega = 3 #Define valor 3 para a velocidade angular da esfera
30
31     #Componente radial do campo magnetico
32     Br = (2*mu_0*sigma*(D**4)*omega/(3*(R**3)))*np.cos(THETA)
33
34     #Componente angular theta do campo magnetico
35     Btheta = (mu_0*sigma*(D**4)*omega/(3*(R**3)))*np.sin(THETA)
36
37     #Componente angular phi do campo magnetico
38     Bphi = 0
39     return Br, Btheta, Bphi
40
41 #Definir a grade em coordenadas esfericas
42 R, THETA, PHI = np.meshgrid(r, theta, phi)
```

```
43
44 #Calcula o valor da funcao vetorial em cada ponto do espaco
45 Br, Btheta, Bphi = vector_field(R, THETA, PHI)
46
47 #Convertendo as componentes para coordenadas cartesianas
48 X = R * np.sin(THETA) * np.cos(PHI)
49 Y = R * np.sin(THETA) * np.sin(PHI)
50 Z = R * np.cos(THETA)
51
52 #Criando a Figura e o objeto de plotagem
53 fig = plt.figure(figsize=(8,8))
54 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
55
56 #Plotando o campo vetorial
57 ax.quiver(X, Y, Z, Br, Btheta, Bphi, color='green', alpha=0.5, length
          =1.0, arrow_length_ratio=0.5, pivot='tail', normalize=True)
58
59 ax.set_xlabel('X') #Insere legenda na direcao x
60 ax.set_ylabel('Y') #Insere legenda na direcao y
61 ax.set_zlabel('Z') #insere legenda na direcao z
62 ax.view_init(30, -60) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. O
          valor padrao e ax.view_init(30, -60).
63 plt.savefig("campo_magnetico_externo_prob_5.png", dpi=500)
64
65 #Simulando a superficie da esfera
66 u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:50j, 0:np.pi:25j]
67 x = 4*np.cos(u)*np.sin(v)
68 y = 4*np.sin(u)*np.sin(v)
69 z = 4*np.cos(v)
70
71 #Plotando a superficie esferica
72 ax.plot_surface(x, y, z, color='yellow', alpha=0.5)
73 ax.plot_wireframe(x, y, z, color='black', alpha=0.2)
74
75 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.7 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 19 referente ao problema 5

```
1 #Importa as bibliotecas numpy, matplotlib e mpl_toolkits
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d, art3d
5
6 #Definicao dos parametros esteticos do grafico final
7 plt.rcParams['text.usetex'] = True
8 plt.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsmath}'
9 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
10 plt.rcParams['font.serif'] = 'Times New Roman'
11 plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
12 plt.rcParams["font.weight"] = "bold"
13 plt.rcParams["axes.labelweight"] = "bold"
14 plt.rcParams["legend.fontsize"] = "large"
15 plt.rcParams["legend.title_fontsize"] = "large"
16 plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2
17
18 #Define o campo vetorial
19 def camp_vet(x, y, z):
20     epsilon = 1 #Define valor 1 para a permissividade eletrica do
21                 #dieletrico
22     V0 = 1      #Define valor 1 para o potencial eletrico nas placas
23     d = 7      #Distancia entre as placas
24     alfa = 2   #Define valor 2 para a constante alfa
25     rho0 = 1  #Define valor 1 para a constante rho0
26     Ex = 0    #Componente x do campo eletrico
27     Ey = 0    #Componente y do campo eletrico
28
29     #Componente z do campo eletrico
30     Ez = -V0/d - (rho0/(2*alfa*epsilon))*np.exp(-2*alfa*z)+(rho0/(4*alfa
31         **2*epsilon*d))*(1-np.exp(2*alfa*d))
32     return Ex, Ey, Ez
33
34 #Define a malha de pontos no espaco 3D
35 X, Y, Z = np.meshgrid(np.linspace(-3,3,3),
36                       np.linspace(-3,3,6),
37                       np.linspace(-3,3,3))
38
39 #Calcula o campo vetorial em cada um dos pontos da grade 3D
40 vx, vy, vz = camp_vet(X, Y, Z)
41
42 #Cria a Figura e o sistema referencial 3D
43 fig = plt.figure()
44 ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
45
46 #Plota o campo vetorial na regioao entre as placas
47 ax.quiver(X, Y, Z, vx, vy, vz, length=1.2, normalize=True, color="
```

```
    darkviolet", alpha=1.0, pivot="tip")
46
47 ax.set_xlabel("X") #Insere a legenda da direcao x
48 ax.set_ylabel("Y") #Insere a legenda da direcao y
49 ax.set_zlabel("Z") #Insere a legenda da direcao z
50 ax.view_init(0, 0) #Angulo de visualizacao em torno do eixo x. O valor
    padrao e ax.view_init(30, -60).
51 plt.savefig("campo_eletrico_problema_6.png", dpi=500) #Salva a Figura
52
53 #Define o plano de cima (placa azul)
54 z_plane_1 = 4
55 X_plane_1, Y_plane_1 = np.meshgrid(np.linspace(-3,3,10), np.linspace
    (-3,3,10))
56 Z_plane_1 = np.ones_like(X_plane_1) * z_plane_1
57
58 #Plota a superficie azul
59 ax.plot_surface(X_plane_1, Y_plane_1, Z_plane_1, alpha=0.5)
60
61 #Define o plano de baixo (placa laranja)
62 z_plane_2 = -3
63 X_plane_2, Y_plane_2 = np.meshgrid(np.linspace(-3,3,10), np.linspace
    (-3,3,10))
64 Z_plane_2 = np.ones_like(X_plane_2) * z_plane_2
65
66 #Plota a superficie laranja
67 ax.plot_surface(X_plane_2, Y_plane_2, Z_plane_2, alpha=0.5)
68
69 plt.show() #Mostra a Figura final
```

Código B.8 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 21 referente ao problema 6

```
1 #Importa as bibliotecas numpy e matplotlib
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 # Definindo os limites do eixo x e do eixo y
6 x_range = np.arange(-2, 2, 0.2 )
7 y_range = np.arange(-2, 2, 0.2 )
8
9 # Criando o meshgrid
10 x_mesh, y_mesh = np.meshgrid(x_range, y_range)
11
12 # Calculando o vetor campo eletrico
13 E = np.multiply( x_mesh, np.exp(-(np.power( x_mesh , 2)) - np.power(
    y_mesh , 2)))
14 dy, dx = np.gradient( E )
15
16 # Criando a Figura com o tamanho de 5x5 polegadas
17 plt.figure(figsize=(5,5))
18
19 # Plotando o campo eletrico como um conjunto de vetores
20 plt.quiver(x_mesh, y_mesh, -dx, -dy, pivot='middle')
21 plt.axis('scaled')
22
23 # Calculo das superficies equipotenciais geradas pelas cargas
24
25 # Definindo os limites do eixo x e do eixo y
26 xp=np.arange(-2, 2, 0.1)
27 yp=np.arange(-2, 2, 0.1)
28 x_mesh, y_mesh = np.meshgrid(xp, yp)
29
30 # Calculando o potencial eletrico
31 E = np.multiply( x_mesh, np.exp(-(np.power( x_mesh , 2)) - np.power(
    y_mesh , 2)))
32
33 # Definindo a distancia de uma carga ate o ponto central da regio de
    plotagem
34 d_0 = 4
35
36 # Calculando os niveis das superficies equipotenciais
37 if (len(E) % 2) != 0:
38     l = int((len(E)+1) / 2)
39 else:
40     l = int((len(E)) / 2)
41 niveis = np.linspace(E[l][l - d_0], -E[l][l - d_0], 6) #niveis
    interseccoos do plano
42
43 # Plotando as linhas de contorno correspondentes as superficies
```

```
    equipotenciais
44 colors=['red', 'green', 'blue']
45 eqp = plt.contour(x_mesh, y_mesh, E, levels=niveis, colors=colors)
46 plt.clabel(eqp)
47
48 # Definindo as coordenadas das cargas
49 carga_x1 = 0.70
50 carga_y1 = 0
51
52 carga_x2 = -0.70
53 carga_y2 = 0
54
55 # Plotando as cargas
56 plt.plot( carga_x1, carga_y1, color='blue', marker='o', linestyle='solid
    ', markersize=7)
57 plt.plot( carga_x2, carga_y2, color='red', marker='o', linestyle='solid'
    , markersize=7)
```

Código B.9 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 24 referente ao problema 7

É importante destacar que o script acima está presente na referência [2], no entanto está anexado a este trabalho para facilitar o acesso ao mesmo. A única alteração realizada no script original foi a troca de sinal dos fatores dx e dy na linha 20 do código.

```
1 #importa as bibliotecas matplotlib, numpy e scipy.constants
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4 from scipy.constants import epsilon_0
5
6 #Define o estilo do grafico a ser plotado usando Matplotlib
7 plt.style.use('_mpl-gallery')
8
9 #Define a fonte do grafico, nesse caso, serif
10 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
11
12 k = 1      #Define valor 1 para a constante k
13 R = 1      #Define valor 1 para o raio da esfera
14
15 #Define o (inicio, fim, numero de pontos) na direcao z
16 z = np.linspace(1, 10, 100)
17
18 #Expressao do campo eletrico de acordo com a equacao 4.89
19 Ez = (k*R**5*np.pi)/(64*epsilon_0*z**4)
20
21 #Cria uma nova Figura e um ou mais subplots dentro dela
22 fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 5))
23
24 #Plota a curva dada pela funcao E(z)
25 ax.plot(z, Ez, linewidth=2.0, color='green')
26
27 #Insere a legenda na direcao x do grafico
28 ax.set_xlabel('Distancia na direcao z', fontsize=14)
29
30 #Insere a legenda na direcao y do grafico
31 ax.set_ylabel('Campo eletrico', fontsize=14)
32
33 plt.show()      #Mostra a Figura final
```

Código B.10 – Script da plotagem do gráfico presente na Figura 25 referente ao problema 8